商管科技季刊　第十二卷　第三期　民國一○○年
Commerce & Management Quarterly, Vol.12, No.3, pp.291~313(2011)

從銷售交易資料探討多商品單一供應商之最適訂購策略

AN OPTIMAL ORDERING STRATEGY FOR MULTIPLE GOODS FROM ONE SUPPLIER UNDER THE TRANSACTION DATA

黃允成
國立屏東科技大學工業管理系教授
陳思婷
國立屏東科技大學工業管理系碩士
潘信佐
國立屏東科技大學工業管理系碩士

Yun-Cheng Huang
Professor, Department of Industrial Management
National Pingtung University of Science and Technology
Sih-Ting Chen
Master, Department of Industrial Management
National Pingtung University of Science and Technology
Shin-Tso Pan
Master, Department of Industrial Management
National Pingtung University of Science and Technology

摘要

本文主要是探討多商品之最適訂購策略，在一般商品中，銷售大略分為離峰、尖峰與假日三時段，不同的商品其需求量亦不相同。因此，我們經由 POS 系統收集多商品每天之銷售資料，瞭解和分析每日之銷售狀況，進而建構出一存貨模型，再根據最佳化分析方法，找出多商品單一供應商之最適 (Q_i^*, R_i^*) ，使總期望存貨成本最小化，並對參數進行敏感度分析。最後，提出四點結論，作為後續研究與實務應用之參考。

關鍵字：隨機性需求、前置時間、敏感度分析

ABSTRACT

The main propose of this article is to establish optimal ordering Strategy for multiple goods. For some merchandise, its sales conditions can be partitioned into three periods: peak-time period, off-peak-time period and holidays. Because of the demands for different goods are not the same, so we need to collect the transaction data through the POS system, analying the daily sales conditions. In addition, we build up an inventory model and according to the optimization technique and a numerical analysis method, the article can find out the optimal ordering quantity and reorder point under multiple goods and single supplier to minimize the total expected cost. The sensitivity analysis was also taken to realize the influence of parameters. Finally, four conclusions are drawn for practical applications and future studies.

KeyWords: Stochastic demand, Lead time, Sensitivity analysis

壹、緒論

由於經濟的快速發展，加上顧客的消費型態也跟著轉變，而為了因應激烈的競爭，零售業必須做好存貨管理，以提升商品週轉率和降低商品之儲存成本，進而達到強化經營績效之目標。由於存貨管理中的訂購量與再訂購點，影響著零售商的銷售業績，因此，如何有效的訂定最適訂購策略，以期使總存貨成本最小化，並提升零售商之競爭力為本研究之主要動機。

因此，本研究藉由 POS 系統取得出每天商品之銷售資料，經由分析每天銷售之資料和根據分配之可加性，找出前置時間下之需求分配。之後，建構一存貨決策模型，並利用最佳化分析方法，找出最適 (Q_i^*, R_i^*) ，以達到總存貨成本最小化之目標，藉以提升零售業之經營績效與管理效能。最後，並對各參數進行敏感度分析，以了

解其對總存貨成本及最佳化決策變數之影響。

貳、文獻探討

針對文獻探討部份，本章以前置時間、需求型態與存貨模型三部分進行相關文獻之回顧，以瞭解學者先前之研究。

一、前置時間

根據前置時間的定義，Tersine（1994）認為前置時間是從顧客下訂單開始，直到接收產品並確實滿足其需求為止，所須要的時間。Ouyang and Chuang（2000）加入服務水準的限制，將前置時間與盤點週期（review period）視為決策變數，為避免訂單交錯，前置時間的長度不能超過盤點週期的長度，可以找出最佳的盤點週期和最佳的前置時間。Downs, Metters, and Semple（2001）研究含多商品、固定前置時間、資源限制和銷售損失之定期性模型。假設資訊技術的成長對監控零售存貨和訂單處理視為一致，而訂單放置的成本可忽略不計，因此小數目訂購沒有懲罰成本。Chang, Chin, and Lin（2006）利用混合整數方法去求解單一產品、多供應商系統的模型，含有變動前置時間、價格數量折扣和資源限制。所提出的方法不僅可以容易從多個供應商和不同價格數量政策上決定最適訂購量，而且允許決策者可以在適當的情況下增加資源限制。Chandra and Grabis（2008）研究單階段變動的前置時間存貨系統，不同於傳統模式在於前置時間依賴著採購成本。研究目的是希望能找到前置時間的數值，能在前置時間的減少和採購成本的增加之間取得平衡。Chang and Lo（2009）提出一個方法克服傳統數量方法的缺點，以改善連續和間斷之可控制前置時間的缺貨後補及銷售損失兩部份，只獲得一個局部最佳解。此外，在適應現實世界情況下，決策者可以加入限制到模型中。

二、需求型態

Hurter and Kaminsky（1968）考慮一個需求服從卜瓦松分配且價格折扣是根據卜瓦松分配而提供之存貨模型。Ray and Chaudhuri（1997）採取在分析存貨系統與存貨相關需求與短缺時考慮貨幣時間價值。兩種類型的通貨膨脹率分為內部（公司）的通貨膨脹與外部（普通經濟）的通貨膨脹。林玉彬、蔡美賢與林建廷（2006）探

討需求量服從羅吉斯分配的前提下，求得一個混合的存貨系統為允許缺貨且缺貨發生時考慮部分欠撥、部分銷售損失及前置時間為可控制的。黃允成與蘇琬菁（2009）藉由觀測顧客到達的間隔時間與需求量，雙重隨機變數的交互作用下，運用統計原理，建構最佳存貨之 (Q^*, R^*) 模式，使總期望存貨成本最小化，最後對各系統參數進行敏感度分析。Dey and Chakraborty（2009）分析一個在不確定和模糊的環境下之定期盤查存貨系統，模型中假設顧客需求量和前置時間為一模糊隨機變數及常數，決定最佳存貨水準和最佳盤查期間使得年總期望成本最小。

三、存貨模型

Misra（1979）提出一個具通貨膨脹的 EOQ 模型，並將貨幣時間價值和不同通膨率考慮進來。Gupta and Vrat（1986）在變動的通膨率下，針對資源限制系統發展一個多產品存貨模型。Lu（1995）考慮單一買方和多個賣方之整合性存貨模型，賣方尋求年總成本最小但受限於買方成本最大化因而蒙受損失。此模型中賣方只需知道買方年需求和先前的訂購頻率，就可以來推測，利用一個啟發式演算法求解。Haksever and Moussourakis（2005）提出一個混合整數規劃模型用以解決在存貨管理中涉及訂購多商品但受限於多資源限制的兩個基本決策。Annadurai and Uthayakumar（2010）規劃出在可控制前置時間下一個啟發性隨機的存貨模型，為了使銷售損失率降低，分析影響兩種不同資金投資類型的成本函數，即為對數成本函數和乘冪成本函數。

綜合上述相關文獻，發現存貨模型中可以加入許多條件以進行探討。需求量與前置時間為兩個重要之參數，且商品銷售與前置時間之長短對存貨數量有很大的影響。因此，本研究經由蒐集商品每天之銷售資料，而在規劃週期中分離峰、尖峰、假日三種不同時段，並在給定之前置時間下，建構一存貨管理模型，利用最佳化分析方法，求解出最適訂購量與再訂購點，以達總存貨成本最小化之目標。

參、模式建構

本章分為模型的基本假設、符號定義，一般性商品存貨模式之推導以及敏感度分析四部份。其中針對存貨模式之推導部份主要用以求解商品之最適訂購量與再訂購點，且在多商品中可知為同一供應商供貨的整合性訂購，最後，以敏感度分析瞭

解各參數對總存貨成本及決策變數之影響。

一、模型基本假設

1. 考慮有限規劃週期且長度已知。
2. 前置時間為已知且固定。
3. 需求為一隨機變數。
4. 需求分為離峰、尖峰與假日三種不同時段。
5. 假設需求服從一常態分配。
6. 探討的商品為一般商品。
7. 商品種類為兩種（含）以上。
8. 多種商品皆為獨立銷售之情形。
9. 假設多種商品皆來自同一個供應商。
10. 某一項商品到達再訂購點時，會進行多商品整合性訂購。
11. 訂購量為一次送達。

二、符號定義

D_l：l 商品在整個規劃週期之需求量

μ_l：l 商品規劃週期之平均需求量

δ_l：l 商品之前置時間需求量

L：前置時間之週數

C_o：商品之每次訂購成本

H_l：規劃週期 l 商品之持有成本

C_l：每單位 l 商品之缺貨成本

R_l：l 商品之再訂購點

Q_l : l 商品之訂購批量

TC_l : l 商品之總存貨成本

I_l : l 商品之庫存量

三、一般性商品最適存貨公式之推導

為了找出最適決策變數組合，使總期望存貨成本最小，一般來說，總期望存貨成本包括總訂購成本、總儲存成本、總缺貨成本，故 l 商品之總期望存貨成本為：

l 商品的總期望存貨成本=總訂購成本+總缺貨成本+總儲存成本

$$E(TC_l)=\frac{E(D_l)}{Q_l}\cdot C_0+\frac{E(D_l)}{Q_l}\cdot\int_{R_l}^{\infty}(\delta_l-R_l)\cdot C_l\cdot f(\delta_l)\cdot d\delta_l$$

$$+\left[\frac{Q_l}{2}\cdot H_l\cdot\int_{R_l}^{\infty}f(\delta_l)\cdot d\delta_l+\int_0^{R_l}\left(\frac{Q_l}{2}+R_l-\delta_l\right)\cdot H_l\cdot f(\delta_l)\cdot d\delta_l\right] \quad (1)$$

想要決定 R_l 與 Q_l 之值使總存貨成本最小，必須對 R_l 與 Q_l 分別求一階導數，並運用萊布尼茲的積分式微分公式，進行求解。

$$\frac{\partial TC_l}{\partial R_l}=\int_0^{R_l}H_l\cdot f(\delta_l)\cdot d\delta_l+\frac{\mu_l}{Q_l}\left[\int_{R_l}^{\infty}(-1)\cdot C_l\cdot f(\delta_l)\cdot d\delta_l\right]=0$$

得　$$F(R_l)=\frac{C_l\cdot\mu_l}{H_l\cdot Q_l+C_l\cdot\mu_l} \quad (2)$$

$$\frac{\partial TC_l}{\partial Q_l}=-\frac{\mu_l}{Q_l^2}\cdot C_0+\frac{H_l}{2}-\frac{\mu_l}{Q_l^2}\cdot\int_{R_l}^{\infty}(\delta_l-R_l)\cdot C_l\cdot f(\delta_l)\cdot d\delta_l=0$$

得　$$Q_l=\left[\frac{2\cdot\mu_l\left[C_0+C_l\int_{R_l}^{\infty}(\delta_l-R_l)\cdot f(\delta_l)\cdot d\delta_l\right]}{H_l}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

欲找出最適訂購量與再訂購點，必需對公式(2)與公式(3)求聯立解，通常可運用數值分析法進行求解，然而一般常態分配之解法過於繁雜，又因標準常態分配具唯一性，故將一般常態轉成標準常態以利計算，其轉換方式如定理所示。

【定理】

若 $\delta_l \sim N\left(\mu_{\delta_l}, \sigma_{\delta_l}^2\right)$，則 $\int_{R_l}^{\infty}(\delta_l - R_l)f(\delta_l)d\delta_l = \sigma_{\delta_l}\int_{R}^{\infty}(Z - Z_R)f(Z)dZ$ ，

其中 $Z = \dfrac{\delta_l - \mu_{\delta_l}}{\sigma_{\delta_l}}$ ，$Z_R = \dfrac{R_l - \mu_{\delta_l}}{\sigma_{\delta_l}}$

因此，將公式(2)轉換為：$Q_l = \left[\dfrac{2 \cdot \mu_l \cdot \left[C_0 + C_l \cdot \sigma_{\delta l} \cdot \sum_{Z_0}^{\infty}(Z_i - Z_0)f(Z_i)\Delta Z\right]}{H_l}\right]^{\frac{1}{2}}$ (4)

由上述公式(3)及公式(4)做聯立解，運用數值分析方法求解出最適 (Q_l^*, R_l^*) ，而欲判斷 $TC_l(Q_l^*, R_l^*)$ 是否為最小值，須經二階導數方法驗證之：

$$\frac{\partial^2 TC_l}{\partial Q_l^2} = \frac{2\mu_l}{Q_l^3}\cdot C_0 + \frac{2\mu_l \cdot C_l}{Q_l^3}\int_{R_l}^{\infty}(\delta_l - R_l)\cdot f(\delta_l)d\delta_l$$

$$= \frac{2\mu_l}{Q_l^3}\left[C_0 + C_l\int_{R_l}^{\infty}(\delta_l - R_l)\cdot f(\delta_l)d\delta_l\right] > 0 \tag{5}$$

由公式(5)可知，由於 $\dfrac{\partial^2 TC_l}{\partial Q_l^2} > 0$，故知 TC_l 為 Q_l 之 $convex$ 函數，因此在給定 R_l^* 下，

可找到 Q_l^* 使 TC_l 有最小值。

$$\frac{\partial^2 TC_l}{\partial R_l^2} = \frac{\partial}{\partial R_l}\left[H_l \cdot F(R_l) - \frac{\mu_l \cdot C_l}{Q_l}\left[1 - F(R_l)\right]\right]$$

$$= H_l \cdot f(R_l) + \frac{\mu_l \cdot C_l}{Q_l}\cdot f(R_l) = f(R_l)\left(H_l + \frac{\mu_l \cdot C_l}{Q_l}\right) > 0 \tag{6}$$

由公式(6)可知，由於 $\dfrac{\partial^2 TC_l}{\partial R_l^2} > 0$，故知 TC_l 為 R_l 之 $convex$ 函數，因此在給定 Q_l^* 下，可找到 R_l^* 使 TC_l 有最小值。

$$\frac{\partial^2 TC_l}{\partial Q_l \partial R_l} = \frac{\mu_l \cdot C_l}{Q_l^2}\left[1 - F\left(R_l\right)\right] > 0 \tag{7}$$

欲判斷 (Q_l^*, R_l^*) 是否為 TC_l 最小值下之最適決策變數組合，可經由 $Hessian$ 矩陣之行列式值進行驗證：

$$\text{令 } H(Q_l^*, R_l^*) = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 TC_l}{\partial Q_l^2} & \dfrac{\partial^2 TC_l}{\partial Q_l \partial R_l} \\ \dfrac{\partial^2 TC_l}{\partial Q_l \partial R_l} & \dfrac{\partial^2 TC_l}{\partial R_l^2} \end{bmatrix}\right|_{\left(Q_l = Q_l^*, R_l = R_l^*\right)}$$

$$\text{若 } \left|H(Q_l^*, R_l^*)\right| = \left.\frac{\partial^2 TC_l}{\partial Q_l^2} \cdot \frac{\partial^2 TC_l}{\partial R_l^2} - \left[\frac{\partial^2 TC_l}{\partial Q_l \partial R_l}\right]^2 \right|_{\left(Q_l = Q_l^*, R_l = R_l^*\right)} > 0 \tag{8}$$

則 (Q_l^*, R_l^*) 為 TC_l 最小值下之最適決策變數之組合。

綜合公式(3)和公式(4)之推導，不僅可求解出最適訂購量與再訂購點，還可藉由總存貨成本最小化方式，擬定出最佳之訂購策略。

當求得 l 商品的 Q_l^* 與 R_l^* 的值，假設在相同的供應商下，多種商品具有同一個訂購週期，則多種商品的訂購批量須做適當之修正。

當我們求得 l 商品的再訂購點 R_l^*，假設當其中一樣商品遇到再訂購點時，因為係由同一個供應商供貨，所以多種商品會整批訂購並一次送達，其中 l^* 為消耗期間最短的商品，即：

$$l^* = \underset{l}{Arg}\ Min\left\{\frac{Q_l^*}{E\left(D_l\right)}, \forall l = 1,2,\cdots,n\right\} \tag{9}$$

若 $l^{*}=1$ 則 $Q_{1}^{'}=Q_{1}^{*}$，其他商品之訂購量為

$$Q_{l}^{'}=Q_{l}^{*}\cdot\frac{\frac{Q_{1}^{*}}{E(D_{1})}}{\frac{Q_{l}^{*}}{E(D_{l})}}\quad ,l=1,2,\cdots,n \tag{10}$$

再求出 l^{**} 為最快碰到再訂購點的商品，即：

$$l^{**}=\underset{l}{Arg}\quad Min\{T_{l}(I_{l}\leq R_{l}),\forall l=1,2,\cdots,n\} \tag{11}$$

l^{**} 為商品庫存量最先降至再訂購點之商品編號，其中 $T_{l}(I_{l}\leq R_{l})$ 為 l 商品的庫存量小於或等於 l 商品的再訂購點之時點。

若 $l^{**}=1$，則 $Q_{1}^{**}=Q_{1}^{'}$ ，而其他商品的訂購量為

$$Q_{l}^{**}=Q_{l}^{'}-(I_{l}-R_{l})\quad ,l=1,2,\cdots,n \tag{12}$$

由公式(9)、(10)、(11)與(12)，可得在同一個訂購週期下 n 種商品的最適訂購批量。則 n 種商品在同一訂購週期下之最適期望總存貨成本為

$$E\left[\sum_{l=1}^{n}TC(Q_{l}^{'},R_{l}^{*})\right]=Max\left\{\frac{E(D_{l})}{Q_{l}^{'}},\forall l\right\}\cdot C_{o}$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\left[Max\left\{\frac{E(D_{l})}{Q_{l}^{'}},\forall l\right\}\cdot\int_{R_{l}^{*}}^{\infty}(\delta_{l}-R_{l}^{*})\cdot C_{l}\cdot f(\delta_{l})\cdot d\delta_{l}\right]$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\left[\frac{Q_{l}^{'}}{2}\cdot H_{l}\cdot\int_{R_{l}^{*}}^{\infty}f(\delta_{l})\cdot d\delta_{l}+\int_{0}^{R_{l}^{*}}\left(\frac{Q_{l}^{'}}{2}+R_{l}^{*}-\delta_{l}\right)\cdot H_{l}\cdot f(\delta_{l})\cdot d\delta_{l}\right] \tag{13}$$

由於一般商品之總存貨成本=總訂購成本+總缺貨成本+總儲存成本，茲針對這三種成本進行探討，以說明多商品統一訂購之總存貨成本低於單一商品個別訂購之總存貨成本。

假設 M 為統一訂購所需訂購之次數，即：

$$M = Max\ \{m_1, m_2, \cdots, m_n, \forall l = 1,2,\cdots,n\} \tag{14}$$

其中 $m_l = \dfrac{E(D_l)}{Q_l}$ 。

個別訂購總訂購成本與統一訂購總訂購成本的差額，以 ΔC_o 表示，即：

$$\Delta C_o = \left[(\sum_{l=1}^{n} m_l) - M \right] \cdot C_o > 0 \tag{15}$$

其中 $\sum_{l=1}^{n} m_l > M$ 。

個別訂購總缺貨成本與統一訂購總缺貨成本的差額，以 ΔC_s 表示，即：

$$\Delta C_s = \sum_{l=1}^{n} \left[m_l \cdot C_s \cdot \int_{R_l}^{\infty} (\delta_l - R_l) \cdot f(\delta_l) \cdot d\delta_l \right] - \sum_{l=1}^{n} \left[M \cdot C_s \cdot \int_{I_l}^{\infty} (\delta_l - I_l) \cdot f(\delta_l) \cdot d\delta_l \right] \tag{16}$$

其中 $I_l \geq R_l\ , \forall l = 1,2,\cdots,n$ 。

個別訂購總儲存成本與統一訂購總儲存成本的差額，以 ΔC_h 表示，即：

$$\Delta C_h = \left[\frac{\sum_{l=1}^{n} (Q_l^{*} - Q_l^{**})}{2} \right] \cdot C_h > 0 \tag{17}$$

其中 Q_l^{*} 與 Q_l^{**} 分別為個別商品之最適訂購量與調整後之最適訂購量，且 $Q_l^{*} > Q_l^{**}$ 。

因此，若 $\Delta C_o + \Delta C_s + \Delta C_h > 0$ ，表示單一商品個別訂購之總存貨成本＞多商品統一訂購之總存貨成本，故以統一訂購比較有利，亦即：

$$若\ \Delta C_s > -(\Delta C_o + \Delta C_h) \tag{18}$$

則統一訂購比較優於個別訂購。

四、多商品之敏感度分析

以下針對儲存成本(H_l)、訂購成本(C_0)、缺貨成本(C_l)，對於最適訂購量(Q_l^*)與再訂購點(R_l^*)之影響進行分析：

1. 由公式(2)可知，當C_0或C_l增加時，則Q_l^*亦隨之增加；反之若C_0或C_l減少時，則Q_l^*會下降；而當H_l增加時，則Q_l^*隨之下降；反之若H_l減少時，則Q_l^*會上升。即C_0、C_l與Q_l^*成正比關係，H_l與Q_l^*成反比關係。
2. 由公式(3)可知，當C_l增加時，$F(R_l)$增加，故R_l^*亦隨之增加，即C_l與R_l^*呈同向變動關係；而當H_l增加時，$F(R_l)$會下降，故R_l^*亦會隨之下降，即H_l與R_l^*呈反向變動關係。

接著針對系統參數進行敏感度分析，探討其對總成本$E(TC_l)$的影響：

1. 在其他條件不變下，將總存貨成本對訂購成本C_0進行偏微分，可得：

$$\frac{\partial E(TC_l)}{\partial C_0}=\frac{\mu_l}{Q_l}>0 \tag{19}$$

即當C_0增加時，總存貨成本亦隨著增加，表示C_0與$E(TC_l)$呈同向變動關係。

2. 在其他條件不變下，將總存貨成本對儲存成本H_l進行偏微分，可得：

$$\frac{\partial E(TC_l)}{\partial H_l}=\frac{Q_l}{2}\cdot\int_{R_l}^{\infty} f(\delta_l)\cdot d\delta_l+\int_0^{R_l}\left(\frac{Q_l}{2}+R_l-\delta_l\right)f(\delta_l)\cdot d\delta_l>0 \tag{20}$$

即當H_l增加時，總存貨成本隨之增加，表示H_l與$E(TC_l)$呈同向變動關係。

3. 在其他條件不變下，將總存貨成本對缺貨成本C_l進行偏微分，可得：

$$\frac{\partial E(TC_l)}{\partial C_l}=\frac{\mu_l}{Q_l}\cdot\int_{R_l}^{\infty}(\delta_l-R_l)\cdot f(\delta_l)\cdot d\delta_l>0 \tag{21}$$

即當C_l增加時，總存貨成本隨之增加，表示C_l與$E(TC_l)$呈同向變動關係。

肆、範例分析

一、範例描述

某一賣場每天營業時間為 9 小時，其中離峰時間和尖峰時間分別為 6 小時和 3 小時，假日（週六、週日）亦每天營業時間 9 小時，而每週需求量等於離峰、尖峰和假日之需求量之總和。本研究以三項商品為例，分別為輕淨美茶、雙茶花及每朝健康，且皆由同一供應商供貨，其前置時間為一週，蒐集每項商品每天之資料，共計三個月，以下分別為此三項商品之第三季之平均需求量、儲存成本 H_l 、缺貨成本 C_l 與訂購成本 C_0 ，如表 1 所示。

二、多商品之範例分析

根據實際所收集三個月之銷售資料，可得知每週離峰、尖峰及假日三種不同時段之銷售狀況，如表 2 所示。

因為常態分配具有可加性，所以根據可加性定理，可知三項商品之前置時間需求量，即 $\delta_1 \sim N(108.04, 13.62^2)$ 、 $\delta_2 \sim N(91.55, 11.32^2)$ 和 $\delta_3 \sim N(84.46, 10.65^2)$ ，接下來探討各商品之最適決策變數組合，首先，須對如下兩式求聯立解：

$$F(R_l) = \frac{C_l \cdot \mu_l}{H_l \cdot Q_l + C_l \cdot \mu_l} \qquad Q_l^* = \left[\frac{2 \cdot \mu_l \cdot \left[C_0 + C_l \cdot \sigma_{\delta_l} \cdot \sum_{Z_0}^{\infty} (Z_i - Z_0) f(Z_i) \Delta Z \right]}{H_l} \right]^{\frac{1}{2}}$$

經由電腦程式設計，進行數值分析演算，可找出同時符合上述兩式之最適訂購量與再訂購點。經數值分析演算法得出其最適決策變數組合，如表 3 所示。

欲判斷 $TC_1(Q_1^*, R_1^*)$ 是否為最小值，須經二階導數方法驗證之。由公式(5)~公式(7)中可以求得二階導數之值為：

$$\frac{\partial^2 TC_1}{\partial Q_1^2} = 0.083 > 0 \qquad \frac{\partial^2 TC_1}{\partial R_1^2} = 6.42 > 0 \qquad \frac{\partial^2 TC_1}{\partial Q_1 \partial R_1} = 0.03 > 0$$

表 1　三項商品之相關成本與第三季之平均需求量

	商品一（輕淨美茶）	商品二（雙茶花）	商品三（每朝健康）
第三季之期望需求量	1298	1099	1014
儲存成本 H_l	20	15	15
缺貨成本 C_l	12	10	10
訂購成本 C_0	430	430	430

試找出三項商品之最適 (Q_l^*, R_l^*) ，以使得總存貨成本能最小。

表 2　三項商品每週各不同時段下之銷售資料

	商品一（輕淨美茶）				商品二（雙茶花）				商品三（每朝健康）			
	離峰	尖峰	假日	總體	離峰	尖峰	假日	總體	離峰	尖峰	假日	總體
平均數	18.16	46.65	43.23	108.04	14.77	40.20	36.58	91.55	13.14	36.85	34.47	84.46
標準差	4.43	8.66	9.54	13.62	4.09	7.74	7.18	11.32	3.44	7.41	6.83	10.65

表 3　三項商品之最適決策變數組合

	商品一（輕淨美茶）	商品二（雙茶花）	商品三（每朝健康）
R_l^*	$R_1^* = 111$	$R_2^* = 99$	$R_3^* = 91$
Q_l^*	$Q_1^* = 238$	$Q_2^* = 256$	$Q_3^* = 246$

欲判斷 (Q_l^*, R_l^*) 是否為 TC_1 最小值下之最適決策變數組合，藉由公式(8)進行驗證：

$$\left|H(Q_1^*, R_1^*)\right| = \frac{\partial^2 TC_1}{\partial Q_1^2} \cdot \frac{\partial^2 TC_1}{\partial R_1^2} - \left[\frac{\partial^2 TC_1}{\partial Q_1 \partial R_1}\right]^2 \Bigg| \left(Q_1 = Q_1^*, R_1 = R_1^*\right)$$

$$= 0.083 \times 6.42 - (0.03)^2 = 0.53 > 0$$

因此，在二階導數驗證之下，(Q_1^*, R_1^*) 為 TC_1 最小值下之最適決策變數之組合。同理，亦可知 $TC_2(256,99)$ 及 $TC_3(246,91)$ 皆為最佳解，如表 4 所示。

因此，三項商品總存貨成本之總和： $E(TC) = E(TC_1) + E(TC_2) + E(TC_3)$

$$= 4445.97 + 3914.72 + 3741.21 = 12101.89\text{元}$$

三、多商品之敏感性分析

為瞭解各主要參數對總存貨成本之影響，在此更進一步針對各參數作敏感度分析：

1. 針對商品一（輕淨美茶）各參數進行敏感度分析：

(1)在其他條件不變下，當訂購成本 C_0 改變時，對總存貨成本 $E(TC_1)$ 和最適 (Q_1^*, R_1^*) 之影響如表 5 所示。

由表 5 可知，在其他條件不變下，當 C_0 增加時， $E(TC_1)$ 隨之增加，此結果與公式(14)之推論相符。亦即當 C_0 增加時， R_1^* 逐漸呈遞減趨勢，而 Q_1^* 與 $E(TC_1)$ 皆逐漸呈遞增趨勢，故 C_0 與 Q_1^* 成同向關係，而 C_0 與 R_1^* 成反向關係。

(2)在其他條件不變下，當儲存成本 H_1 改變時，對總存貨成本 $E(TC_1)$、最適 (Q_1^*, R_1^*) 之影響如表 6 所示。

由表 6 可知，在其他條件不變下，當 H_1 增加時， $E(TC_1)$ 隨之增加，此結果與公式(15)之推論相符。亦即當 H_1 增加時，R_1^* 與 Q_1^* 皆逐漸呈遞減趨勢，故 H_1、Q_1^* 與 R_1^* 成反向關係。

表 4　三項產品最適決策變數與總存貨成本之統整表

	商品一（輕淨美茶）	商品二（雙茶花）	商品三（每朝健康）
$TC_l(Q_l^*, R_l^*)$	$TC_1(238,111) = 4445.97$	$TC_2(256,99) = 3914.72$	$TC_3(246,91) = 3741.21$

表 5　C_0 變動與 $E(TC_1)$、R_1^*、Q_1^* 之關係表

C_0	430	440	450	460	470
R_1^*	111.01	110.99	110.96	110.94	110.91
Q_1^*	237.90	240.81	243.51	246.18	248.82
$E(TC_1)$	4795.86	4855.47	4908.00	4959.53	5011.00

表 6　H_1 變動與 $E(TC_1)$、R_1^*、Q_1^* 之關係表

H_1	20	30	40	50	60
R_1^*	111.01	110.52	110.17	109.88	109.65
Q_1^*	237.90	194.72	168.87	151.23	138.20
$E(TC_1)$	4795.86	5883.80	6800.64	7615.44	8348.67

(3)在其他條件不變下，當缺貨成本 C_1 改變時，對總存貨成本 $E(TC_1)$、最適 (Q_1^*, R_1^*) 之影響如表 7 所示。

由表 7 可知，在其他條件不變下，當 C_1 增加時，$E(TC_1)$ 隨之增加，此結果與公式(16)之推論相符。亦即當 C_1 增加時，R_1^* 逐漸呈遞增趨勢，而 Q_1^* 則呈趨於平穩，比較無明顯變化。

2. 針對商品二（雙茶花）各參數進行敏感度分析：

(1)在其他條件不變下，當訂購成本 C_0 改變時，對總存貨成本 $E(TC_2)$、最適 (Q_2^*, R_2^*) 之影響如表 8 所示。

由表 8 可知，在其他條件不變下，當 C_0 增加時，$E(TC_2)$ 隨之增加，此結果與公式(14)之推論相符。亦即當 C_0 增加時，R_2^* 逐漸呈遞減趨勢，而 Q_2^* 與 $E(TC_2)$ 皆逐漸呈遞增趨勢，故 C_0 與 Q_2^* 成同向關係，而 C_0 與 R_2^* 成反向關係。

(2)在其他條件不變下，當儲存成本 H_2 改變時，對總存貨成本 $E(TC_2)$、最適 (Q_2^*, R_2^*) 之影響如表 9 所示。

由表 9 可知，在其他條件不變下，當 H_2 增加時，$E(TC_1)$ 隨之增加，此結果與公式(15)之推論相符。亦即當 H_2 增加時，R_2^* 與 Q_2^* 皆逐漸呈遞減趨勢，故 H_2 、Q_2^* 與 R_2^* 成反向關係。

(3)在其他條件不變下，當缺貨成本 C_2 改變時，對總存貨成本 $E(TC_2)$、最適 (Q_2^*, R_2^*) 之影響如表 10 所示。

由表 10 可知，在其他條件不變下，當 C_2 增加時，$E(TC_2)$ 會增加，此結果與公式(16)之推論相符。亦即當 C_2 增加時，R_2^* 逐漸呈遞增趨勢，而 Q_2^* 則比較無明顯變化。

表 7　C_1 變動與 $E(TC_1)$、R_1^*、Q_1^* 之關係表

C_1	12	22	32	42	52
R_1^*	111.01	112.41	113.23	113.79	114.22
Q_1^*	237.90	238.05	238.00	237.94	237.91
$E(TC_1)$	4795.86	4819.55	4834.34	4843.69	4851.46

表 8　C_0 變動與 $E(TC_2)$、R_2^*、Q_2^* 之關係表

C_0	430	440	450	460	470
R_2^*	98.89	98.83	98.74	98.68	98.59
Q_2^*	256.11	259.00	261.88	264.71	267.52
$E(TC_2)$	3903.84	3950.88	3992.07	4032.95	4072.96

表 9　H_2 變動與 $E(TC_2)$、R_2^*、Q_2^* 之關係表

H_2	15	25	35	45	55
R_2^*	98.89	97.11	95.93	95.05	94.33
Q_2^*	256.11	199.50	169.33	149.86	135.97
$E(TC_2)$	3903.84	5065.31	6011.87	6830.87	7564.21

表 10　C_2 變動與 $E(TC_2)$、R_2^*、Q_2^* 之關係表

C_2	10	20	30	40	50
R_2^*	98.89	103.36	105.80	107.46	108.70
Q_2^*	256.11	256.03	255.88	255.75	255.64
$E(TC_2)$	3903.84	3958.14	3989.56	4011.31	4029.14

3. 針對商品三（每朝健康）各參數進行敏感度分析：

(1)在其他條件不變下，當訂購成本 C_0 改變時，對總存貨成本 $E(TC_3)$、最適 (Q_3^*, R_3^*) 之影響如表 11 所示。

由表 11 可知，在其他條件不變下，當 C_0 增加時，$E(TC_3)$隨之增加，此結果與公式(14)之推論相符。亦即當 C_0 增加時，R_3^* 逐漸呈遞減趨勢，而 Q_3^* 與 $E(TC_3)$皆逐漸呈遞增趨勢，故 C_0 與 Q_3^* 成同向關係，而 C_0 與 R_3^* 成反向關係。

(2)在其他條件不變下，當儲存成本 H_3 改變時，對總存貨成本 $E(TC_3)$、最適 (Q_3^*, R_3^*) 之影響如表 12 所示。

由表 12 可知，在其他條件不變下，當 H_3 增加時，$E(TC_3)$隨之增加，此結果與公式(15)之推論相符。亦即當 H_3 增加時，R_3^* 與 Q_3^* 皆逐漸呈遞減趨勢，故 H_3 、Q_3^* 與 R_3^* 成反向關係。

(3)在其他條件不變下，當缺貨成本 C_3 改變時，對總存貨成本 $E(TC_3)$、最適 (Q_3^*, R_3^*) 之影響如表 13 所示。

由表 13 可知，在其他條件不變下，當 C_3 增加時，$E(TC_3)$會增加，此結果與公式(16)之推論相符。亦即當 C_3 增加時，R_3^* 逐漸呈遞增趨勢，而 Q_3^* 則比較無明顯變化。

四、訂購批量之調整

假設當某一項商品之庫存量 I_l 降至再訂購點 R_l 時，因為皆是由同一個供應商供貨，所以 n 種商品皆會一次送達，在本章中是以三項商品為例，因此，要先求出 l^*，其為消耗期間最短之商品，即：

$$l^* = \underset{l}{Arg\ Min}\left\{\frac{Q_l^*}{E(D_l)}, \forall l = 1,2,3\right\}$$
$$= \underset{l}{Arg\ Min}\left\{\frac{Q_1^*}{E(D_1)} = \frac{238}{1298} = 0.18, \frac{Q_2^*}{E(D_2)} = \frac{256}{1099} = 0.23, \frac{Q_3^*}{E(D_3)} = \frac{246}{1014} = 0.24\right\} = 1$$

表 11 C_0 變動與 $E(TC_3)$、R_3^*、Q_3^* 之關係表

C_0	430	440	450	460	470
R_3^*	91.10	91.05	90.96	90.88	90.85
Q_3^*	245.91	248.68	251.45	254.18	256.85
$E(TC_3)$	3746.95	3787.41	3826.93	3865.96	3910.05

表 12 H_3 變動與 $E(TC_3)$、R_3^*、Q_3^* 之關係表

H_3	15	25	35	45	55
R_3^*	91.10	89.43	88.32	87.50	86.79
Q_3^*	245.91	191.52	162.54	143.83	130.49
$E(TC_3)$	3746.95	4854.56	5760.91	6544.83	7245.76

表 13 C_3 變動與 $E(TC_3)$、R_3^*、Q_3^* 之關係表

C_3	10	20	30	40	50
R_3^*	91.10	95.33	97.63	99.20	100.36
Q_3^*	245.91	245.84	245.72	245.60	245.51
$E(TC_3)$	3746.95	3792.91	3822.48	3845.35	3859.92

由於最小消耗期間之商品為商品一（輕淨美茶），故 $l^*=1$ 且 $Q_1^{'}=Q_1^*$。另兩項商品之訂購量分別為：$Q_2^{'}=256\times\frac{0.18}{0.23}=200$（罐）和 $Q_3^{'}=246\times\frac{0.18}{0.24}=185$（罐）

假設當商品一（輕淨美茶）之庫存量 I_1 最快下降至再訂購點 R_1，而商品二（雙茶花）之庫存 $I_2=97$（罐），商品三（每朝健康）之庫存量 $I_3=90$（罐），即 $l^{**}=\underset{l}{Arg}\ \ Min\{T_l(I_l\leq R_l),\forall l=1,2,3\}=1$（即為商品一）

l^{**} 為商品庫存量 I_l 最先降至再訂購點 R_l 之商品編號，其中 $T_l\left(I_l \le R_l\right)$ 為 l 商品之庫存量 I_l 小於或等於 l 商品的再訂購點 R_l 的時點。故可由公式(11)及公式(12)可得三項商品在同一訂購週期下之最適訂購量為

$Q_1^{**} = Q_1^{'} = 238$（罐）、$Q_2^{**} = Q_2^{'} - \left(I_2 - R_2\right) = 200 - \left(97 - 99\right) = 202$（罐）
$Q_3^{**} = Q_3^{'} - \left(I_3 - R_3\right) = 185 - \left(90 - 91\right) = 186$（罐）

因此，將三項商品調整後之最適 (Q_l^{**}, R_l^{*}) 彙整如表 14 所示。

由公式(9)、(10)、(11)與(12)，可得在同一個訂購週期下 n 種商品的最適訂購批量，則由公式(13)可知三種商品在同一訂購週期下之最適期望總存貨成本為：

$$E\left[\sum_{l=1}^{3} TC\left(Q_l^{'}, R_l^{*}\right)\right] = Max\left\{\frac{E\left(D_l\right)}{Q_l^{'}}, \forall l\right\} \cdot C_o$$

$$+ \sum_{l=1}^{3}\left[Max\left\{\frac{E\left(D_l\right)}{Q_l^{'}}, \forall l\right\} \cdot \int_{R_l^{*}}^{\infty}\left(\delta_l - R_l^{*}\right) \cdot C_l \cdot f\left(\delta_l\right) \cdot d\delta_l\right]$$
$$+ \sum_{l=1}^{3}\left[\frac{Q_l^{'}}{2} \cdot H_l \cdot \int_{R_l^{*}}^{\infty} f\left(\delta_l\right) \cdot d\delta_l + \int_{0}^{R_l^{*}}\left(\frac{Q_l^{'}}{2} + R_l^{*} - \delta_l\right) \cdot H_l \cdot f\left(\delta_l\right) \cdot d\delta_l\right]$$

將相關數據代入公式(13)可得：

$$E\left[\sum_{l=1}^{3} TC\left(Q_l^{'}, R_l^{*}\right)\right] = 5.56 \times 430 + \left[9.994347 + 2.986364 + 3.149427\right]$$

$$+ \left[2091.041 + 1577.8 + 1437.606\right] = 7513.38 \text{（元）}$$

其中 $5.56 = \dfrac{1}{0.18}$ 而來。

因此，三種商品之最適期望總存貨成本為 $E\left[\sum_{l=1}^{3} TC\left(Q_l^{'}, R_l^{*}\right)\right] = 7513.38$（元）

由以上分析可知，當以個別訂購計算出之總存貨成本總和為 12101.89 元，而以統一訂購計算出之總存貨成本為 7513.38 元，顯示統一訂購優於個別訂購，此結果與公式(18)相符合。

表 14　調整後之最適 (Q_l^{**}, R_l^{*}) 之彙整表

	商品一（輕淨美茶）	商品二（雙茶花）	商品三（每朝健康）
(Q_l^{**}, R_l^{*})	$(238,111)$	$(202,99)$	$(186,91)$

伍、結論與建議

本研究藉由分析每天之銷售資料，利用分配之可加性定理，找出前置時間內需求分配，並建構一最適存貨管理模型，運用數值分析演算法，找出最適 (Q_l^{*}, R_l^{*}) ，使個別商品總存貨成本最小化，然因多項商品皆由同一供應商供應，故在相同供貨週期下，對各項商品之最適訂購量進行調整，以期適應實際情況之所需，達到同步供貨之目的，最後，經由敏感度分析了解各參數對總存貨成本與最佳化決策變數之影響。本研究之具體結論如下所示：

1. 藉由收集及分析銷售交易資料和分配可加性定理，將離峰、尖峰與假日三種不同時段之需求分配加總，以求得前置時間之需求分配。

2. 運用數值分析演算法，求解出最適 (Q_l^{*}, R_l^{*}) 。在多項商品皆係由同一個供應商供貨之條件下，當其中一項商品之庫存量降至再訂購點時，零售商會依各商品之庫存狀況，進行多商品之整合性訂購，以避免多次配送之困擾。

3. 由敏感度分析可知，訂購成本、持有成本與缺貨成本，對於總存貨成本皆呈同向變動關係，顯示這三種成本對於總存貨成本皆有同向之影響。由敏感度分析可知，當訂購成本增加時，再訂購點會往下調整，而訂購量會上升，此乃因訂購成本增加，零售商為了避免付出額外的訂購成本，會增加訂購數量以減少訂購次數，降低總訂購成本；當持有成本提高時，訂購量與再訂購點皆會下降，此乃因欲壓低存貨之持有成本，會朝向以多次訂購的方式加以因應，減少存貨之持有成本，以達到總存貨成本最小化之目標；當缺貨成本增加時，為了避免缺貨所造成之損失，會提高再訂購點，以減少商品短缺情況發生。

參考文獻

一、中文部分

1. 林玉彬、蔡美賢與林建廷(2006)，含有設置成本之流行商品的存貨模型，文大商管學報，11(2)，21-32。
2. 黃允成、蘇琬菁(2009)，從顧客到達間隔時間之觀測探討一般性商品最適存貨策略之研究，國立屏東科技大學工業管理研究所未出版碩士論文。

二、英文部分

1. Annadurai, K., & Uthayakumar, R. (2010). Reducing lost-sales rate in (T,R,L) inventory model with controllable lead time. Applied Mathematical Modelling, 34(11), 3465-3477.
2. Chang, C. T., Chin. C. L., & Lin, M. F. (2006). On the single item multi-supplier system with variable lead-time, price-quantity discount, and resource constraints. Applied Mathematics and Computation, 182(1), 89-97.
3. Chang, C. T., & Lo, T. U. (2009). On the inventory model with continuous and discrete lead time, backorders and lost sales. Applied Mathematical Modeling, 33, 2196-2206.
4. Chandra, C., & Grabis, J. (2008). Inventory management with variable lead-time dependent procurement cost. Omega, 36(5), 877-887.
5. Downs, B., Metters, R., & Semple, J. (2001). Managing inventory with multiple products, lags in delivery, resource constraints, and lost sales: A mathematical programming approach. Management Science, 47(3), 464-479.
6. Gupta, R., & Vrat, P. (1986). Inventory model with multi items under constraint systems for stock dependent consumption rate. Proceedings of XIX Annual Convention of Operation Research Society of India, 2, 579-609.
7. Hurter, A. P., & Kaminsky, F. C. (1968). Inventory control with random and regular replenishment. Journal of Industrial Engineering, 19, 380-385.

8. Haksever, C., & Moussourakis, J. (2005). A model for optimizing multi-product inventory systems with multiple constraints. International Journal of Production Economics, 97(1), 18-30.

9. Lu, L. (1995). A one-vendor multi-buyer integrated inventory model. European Journal of Operational Research, 81(2), 312-323.

10. Misra, R. B. (1979). A note on optimal inventory management under inflation. Naval Research, Logistics Quarterly, 26, 161-165.

11. Dey, O., & Chakraborty, D. (2009). Fuzzy periodic review system with fuzzy random variable demand. European Journal of Operational Research, 198(1), 113-120.

12. Ouyang, L. Y., & Chuang, B. R. (2000). A periodic review inventory model involving variable lead time with a service level constraint. International Journal of Systems Science, 31, 1209-1215.

13. Ray, J., & Chaudhuri, K. (1997). An EOQ model with stock-dependent demand, shortage, inflation and time discounting. International Journal of Production Economics, 53(2), 171-180.

14. Tersine, R. J. (1994). Principles of inventory and material management. NY: North Holland.

2011 年 **01** 月 **31** 日收稿

2011 年 **02** 月 **16** 日初審

2011 年 **04** 月 **22** 日複審

2011 年 **05** 月 **04** 日接受