

TRINOMIAL BLACK-SCHOLES 選擇權演 算法之模擬與實證

A SIMULATION AND EMPIRICAL STUDY OF THE TRINOMIAL BLACK-SCHOLES OPTION PRICING ALGORITHM

周恆志

銘傳大學財務金融學系

王功亮

中原大學財務金融學系

Heng-Chih Chou

Department of Finance

Ming Chuan University

David Wang

Department of Finance

Chung Yuan Christian University

摘 要

Cakici and Topyan (2000) 簡化 Ritchken and Trevor (1999) 的樹狀圖演算法，文獻中稱為 RTCT 演算法，本文進一步將 RTCT 演算法結合 Broadie and Detemple(1996) 的 BBS 概念，提出 Trinomial Black-Scholes (TBS) GARCH 選擇權演算法。為了檢測 TBS 選擇權演算法的適用性，我們進行數值模擬分析，並以台灣美式認購權證市場資料配適，再與 RTCT 演算法的估計結果相比較。結果發現 TBS 選擇權演算法可以提升樹狀圖評價模型的運算效率，當評估長期選擇權時，或是處理大量交易資料時，確有節省時間的優勢。台指選擇權市場資料的配適結果同樣支持 TBS 選擇權演算法在台灣金融市場應用的優越性。

關鍵詞：GARCH 選擇權演算法、樹狀圖演算法、NGARCH 模型、認購權證、台指選擇權

ABSTRACT

Cakici and Topyan (2000) modified Ritchken and Trevor's (1999) trinomial lattice algorithm for option pricing, and it was called RTCT algorithm. This article proposes the Trinomial Black-Scholes (TBS) GARCH option pricing algorithm, which graft Black and Scholes (1973) on RTCT trinomial lattice algorithm. In order to test TBS algorithm's performance, we conduct a numerical simulation and then empirically examine TBS algorithm's performance on the pricing of the call warrants in Taiwan Stock Exchange. The pricing results are compared with the pricing results of RTCT lattice algorithm. We find that TBS algorithm can improve the convergence of lattice algorithm. TBS algorithm is more efficient in terms of computing time, especially for long-term options or on dealing with more options in the same time. A robustness test by applying to TAIEX options also demonstrates that TBS algorithm is a comparative alternative of option pricing algorithms for Taiwan financial markets.

Keywords: GARCH option pricing model, Lattice algorithm, NGARCH, Call warrants, TAIEX option

壹、前言

Black and Scholes (BS, 1973) 選擇權評價模型雖然在實務界被廣泛所採用，但是此模型假設標的資產價格波動性為常數，缺乏實證資料的支持。多數實證研究支持 ARCH/GARCH 族模型有助於刻畫財務時間數列波動性的軌跡，其中 Bollerslev, Chou, and Kroner (1992) 更指出 GARCH (1,1) 已能充份掌握財務時間數列報酬率的異質變異性。但在此行程之下的選擇權評價研究，則至 Duan (1995) 才有突破性的發展。Duan 適當地引入效用函數以及分配之假設，將 GARCH 行程轉換為局部風險中立 (local risk-neutralization) 的 Q 測度，並且利用蒙地卡羅數值模擬證實其可行性。在 Duan (1995) 的基礎下，許多 GARCH 型選擇權評價法陸續出現，例如 Duan and Simonato (1998) 的平賭法 (empirical martingale simulation)，Heston and Nandi (2000) 的分析解，Duan and Simonato (2001) 的馬可夫鏈 (Markov chain) 矩陣演算法，Hanke (1997) 的類神經網路法，Duan, Gauthier, Simonato, and Sasseville (2003) 的 Edgeworth

binomial GARCH 演算法，以及本文所探討的 Ritchken and Trevor (RT, 1999) 的樹狀圖演算法等。

由於 GARCH 行程在本質上具有路徑相依的屬性，若以樹狀圖描述其軌跡，則會隨著時間切割期數的增加，而使價格行程的節點 (nodes) 呈指數型倍增，造成節點過度發散而導致無法記錄的困難。而且 GARCH 行程基本上屬於雙變數 (即資產價格和資產價格波動性) 的擴散行程，因此要在樹狀圖上同時表現此兩變數的波動行程實屬不易。RT (1999) 有別於傳統樹狀圖刻畫標的資產價格行程的做法，改以三元樹狀圖刻劃波動性行程的軌跡，再推算波動性相對應的資產價格，有效描述雙變數的擴散行程。三元樹的優點在於具有較大彈性¹，不但可以近似大部分的 GARCH 模型，亦可以適用於評估美式選擇權的價格。Lin, Wu, and Jian (2004) 曾結合 RT (1999) 的樹狀圖演算法與 Amin (1993) 的跳躍擴散模型 (jump-diffusion)，發展資產價格不連續跳躍下的 GARCH 型選擇權評價模型，其結果支持 RT (1999) 演算法能有效捕捉標的資產價格行程的 GARCH 效果，有助於提升評價績效。

然而 RT (1999) 的樹狀圖演算法相當費時，這是因為 RT (1999) 建構樹狀圖時要求記錄每一節點的所有條件變異數，由於選擇權到期前到達任一節點的路徑繁多，而且每一路徑皆對應著特有的條件變異數，因此長期選擇權的路徑數會呈指數型倍增而發散，耗費龐大記憶體使得運算缺乏效率。這個特性導致樹狀圖演算法在實證應用與後續發展上相當緩慢，因此若能進一步有效改進其收斂速度，對於 RT (1999) 三元樹法的實用性應有極大之助益。Cakici and Topyan (2000) 對 RT (1999) 樹狀圖法加以修正，改變樹狀圖各節點條件變異數記錄方式，當建構三元樹的節點時，僅記錄到達此節點之條件變異數的最大值與最小值，以加快收斂速度，文獻中稱為 Ritchken-Trevor-Cakici-Topyan (RTCT) 三元樹演算法。Cakici and Topyan (2000) 模擬的結果也指出，RTCT 三元樹演算法不但可以加快收斂速度，評價結果也比 RT (1999) 準確。另外，Lyu and Wu (2003) 曾提出均值追蹤法 (mean-tracking algorithm)，利用 RT (1999) 原本假設為平坦的中間路徑去追蹤標的資產的期望價格，此一修正方式可以使樹狀圖較為緊緻 (compact)，加快收斂速度。

本文則引入 Binomial Black-Scholes (BBS) 的概念來改進 RTCT 三元樹演算法。我們同樣先利用 NGARCH 模型估算條件波動性，再建構標的資產價格的樹狀圖，但是此樹狀圖只須建構至選擇權到期日的前一天為止，此時即可引用 BS 模型公式解直接推算到期日前一天的選擇權價格，接著同樣採回溯法 (backward recursion process) 推估出期初的選擇權價格。BBS 法的概念是由 Broadie and Detemple (1996) 所提出，BBS 法旨在增進 Cox, Ross, and Rubinstein (CRR, 1979) 二元樹評價法的準確性，並

加快收斂速度。由於 CRR (1979) 二元樹選擇權評價法的收斂性並未隨著分割期數增加而單調遞增，此一不穩定的收斂性限制了外插法的使用，BBS 法有助推算出平滑的收斂價格。

BBS 法的作法是在選擇權到期日的前一天，利用 BS 公式直接計算當天（到期日前一天）的選擇權價格，接著即直接回溯推算期初的選擇權價格，無需繼續將二元樹推展到最後一天。Broadie and Detemple (1996) 的想法是：美式選擇權在到期日前一天提前履約的可能性相當低，所以此時美式選擇權價值應該極為近似歐式選擇權價值，因此可以採用 BS 模型直接求出當天（到期日前一天）的選擇權價格。BBS 法在文獻中已有不少的應用，例如 Chang, Chung, and Richard (2001) 曾結合 BBS 法與 Richardson 外插法以加速選擇權評價演算法的收斂性，而得到令人滿意的結果。Chung and Shackleton (2002) 指出 BBS 法可以有效改善二元樹法對選擇權風險係數 (Greeks) 的估計。

本文所提出的 Trinomial Black-Scholes (TBS) GARCH 選擇權演算法乃利用 BBS 法的概念，將 BS 公式加於 RTCT 三元樹的尾端，藉以進一步加速評價的效率。因此本文的文獻定位是遵循著 RT (1999) 與 CT (2000) 的三元樹狀圖演算法，在 RTCT 法的運算基礎上，於到期日前一期的節點上直接以 BS 公式解取代估計與回溯的過程，希望在不增加評價誤差的前題下，提高評價速度。由於 TBS 演算法減少了對最後一天資產價格與選擇權價格的估計程序，同時也省略了由最後一天回溯到前一天的估計程序，直接以 BS 公式解加在三元樹的尾端，理論上可以增加估價時的速度。尤其對於距到期日較為長期的選擇權商品，TBS 演算法應該可以發揮避免節點過度發散的效果。為驗證 TBS 演算法的評價績效，本文採行兩種方式進行分析：首先我們採用數值模擬，本文引用 RT (1999) 與 Cakici and Topyan (2000) 文章中的參數值代入 TBS 演算法，並將估價結果與 RTCT 法的估價結果比較。其次我們以臺灣證券交易所發行的美式認購權證市場資料，配適 TBS 選擇權演算法進行實證，藉以探討在標的股票報酬率服從 NGARCH 行程之下，TBS 演算法的適用性。本文對 TBS 演算法的模擬與認購權證市場資料的配適結果皆支持此法有助於提升 GARCH 樹狀圖演算法的評價績效，為證實 TBS 演算法應用在台灣金融市場的一般性，我們另以台指選擇權契約市場資料作為配適對象，其結果同樣支持 TBS 演算法確為可行的 GARCH 型選擇權演算法。

以下說明本文的架構，除本節前言外，第貳節介紹本文所提出的 TBS GARCH 選擇權評價演算法。第參節報告 TBS 演算法的數值模擬結果，第肆節說明台灣美式認購權證的樣本資料、模型參數估計方法與實證結果；最後，第伍節是本文的結論與後續研究建議。

貳、TBS GARCH 樹狀圖選擇權演算法

本節說明 TBS 選擇權演算法的理論模型與操作步驟，並舉例說明 TBS 選擇權演算法的操作過程。

一、估計 NGARCH 模型參數

TBS 選擇權演算法是在 NGARCH 波動行程下，藉由紀錄各期的條件變異數資料，建構標的資產價格的樹狀圖，藉以估計選擇權的理論價格。因此 TBS 演算法首先必須估計標的資產的 NGARCH 模型參數。

TBS 演算法假設 S_t 為標的資產在時點 t 的價格，且在機率測度 P 之下，標的資產價格的動態行程服從 Engle and Ng (1993) 的 NGARCH (1,1) 模型：

$$\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) = r + \lambda\sqrt{h_{t+1}} - \frac{1}{2}h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}}v_{t+1} \quad (1)$$

$$h_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 h_t (v_{t+1} - c)^2 \quad (2)$$

$$v_{t+1} | F_t \sim N(0,1) \quad (3)$$

其中，假定報酬率方程式在時點 t 的干擾項 v_t 服從 $N(0,1)$ ，而 h_t 為在時點 t 的資產報酬率條件變異數。 r 是無風險利率，NGARCH 模型參數必須滿足下列限制： $\beta_0 > 0$ ， $\beta_1 \geq 0$ ， $\beta_2 \geq 0$ 以及 $\beta_1 + \beta_2(1+c^2) < 1$ ，以保證穩態變異數存在且為正定。在 NGARCH 模型常被廣泛應用於捕捉在股票市場經常出現的波動性不對稱²，若槓桿參數 $c > 0$ ，則

表示該市場具有波動性不對稱。而 λ 為單位風險貼水，在此設定為常數。 F_t 為資訊集合，可以視為由 $\{S_0, h_0, v_T; T=0,1,2,\dots,t\}$ 所構成市場資訊。根據 Duan (1995) 定義的局部風險中立關係 (local risk neutralization valuation relation, LRNVR)，NGARCH (1,1) 模型在風險中立機率測度 Q 下可轉化如下：

$$\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) = r - \frac{1}{2}h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}}\varepsilon_{t+1} \quad (4)$$

$$h_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 h_t (\varepsilon_{t+1} - c - \lambda)^2 \quad (5)$$

$$\varepsilon_{t+1} | F_t \sim N(0,1) \quad (6)$$

其中， ε_t 為報酬方程式在時點 t 的干擾項。

二、建構條件變異數的三元樹狀圖，並推算相對應的資產價格

由於 NGARCH 模型本質上是連續的，為建立標的資產價格樹狀圖以逼近 NGARCH 模型，TBS 演算法也引用 RTCT 的做法，將對數化資產價格 $\ln(S_t)$ 予以格距化 (gridding)，並引入空間化參數 (spacing parameter) γ_n 以決定兩相鄰之對數化價格的間距 (gap)，所有對數化價格 $\ln(S_t)$ 得以根據空間化參數 $\gamma_n = \gamma/\sqrt{n}$ 予以分離，其中 n 為分割期數。 n 值愈大表示期間分割愈細，兩兩相鄰的對數化資產價格差距愈小。而且在給定分割期數 n 值之下，樹狀圖中下一期對數化價格分配方式為 $(2n+1)$ 個離散的隨機變數值。為了能使樹狀圖的節點保持重合，這 $(2n+1)$ 個離散的隨機數值需受限於 γ_n 的整數倍。為此，本文參考 RTCT 的做法，引進跳躍參數 (jump parameter) η ，以解決傳統樹狀圖因為條件變異數不同而導致路徑張開幅度不一、無法重合的問題。由於下一期 $(2n+1)$ 個對數化價格的出現機率必落在 0 與 1 之間，所以跳躍參數 η 即為滿足以下條件的最小正整數： $(\eta - 1) < \frac{\sqrt{h_t^a}}{\gamma} \leq \eta$ ，其中 h_t^a 為樹狀圖模型所近似的變異數。令 $y_t = \ln(S_t)$ ，上標 a 代表近似值，則 NGARCH (1,1) 模型可以由下列三元樹狀圖模型予以近似：

$$y_{t+1}^a = y_t^a + j\eta\gamma_n \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n \quad (7)$$

$$h_{t+1}^a = \beta_0 + \beta_1 h_t^a + \beta_2 h_t^a (\varepsilon_{t+1}^a - c^*)^2 \quad (8)$$

$$\varepsilon_{t+1}^a = \frac{j\eta\gamma_n - \left(r - \frac{1}{2}h_t^a\right)}{\sqrt{h_t^a}} \quad (9)$$

$$\gamma_n = \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \quad (10)$$

其中， c^* 是槓桿參數（ c ）與風險貼水值（ λ ）的總和（ $c+\lambda$ ），對標的股票價格的未來走勢具有影響力，但在風險中立測度下，我們無法個別估計此二係數，因此式(8)中本文以 c^* 表此二參數的加總。根據上述樹狀圖模型，我們即可建構條件變異數的三元樹狀圖，因此樹狀圖上每一節點都有配對的條件變異數與對數化價格（ h_t, y_t ），其中 $y_t = \ln(S_t)$ 。換言之，樹狀圖上每一節點都有配對的條件變異數與資產價格（ h_t, S_t ）。特別的是 TBS 的條件變異數三元樹以及對數化資產價格三元樹僅需建構至選擇權到期日的前一期即可。

同時為加快收斂速度，本文採用 RTCT 演算法的記錄方式，亦即建構三元樹節點時，僅記錄到達此節點之條件變異數的最大值與最小值。並可以選擇一 K 值，在估算選擇權價格時，方以內插法估計介於最大值與最小值之間的 K 個條件變異數，來估計選擇權價格。基於此，第 t 期任一節點上的變異數，僅來自於第（ $t-1$ ）期各節點處條件變異數的最大值與最小值，如此便可完成樹狀圖並進行選擇權的評價。當估計選擇權價格時若下一期的變異數落在所儲存最大與最小條件變異數之外時，則採用極值法，亦即直接以最大或最小條件變異數替代。理論上此一作法不但節省記憶空間，而且解決了 GARCH 模型配適到樹狀結構時其本質上路徑相依的問題。

三、在到期日前一期時直接以 BS 公式解估計選擇權價格

建構了到期日前一期（亦即 $T-1$ 期）條件變異數的樹狀圖與對數化資產價格的樹狀圖後，即可利用 BS 模型公式解直接計算在（ $T-1$ ）期各種變異數與資產價格下的選擇權價格。以買權為例，到期日前一期在節點（ $T-1, i$ ）的位置上，若條件變異數為 $h_{t-1}^a(i, k)$ ， $k=1, 2, \dots, K$ ，相對應之標的資產價格為 $S_{T-1}^a(i, k) = e^{y_{T-1}^a(i, k)}$ ，令買權履約價格為 X ，則節點（ $T-1, i$ ）的第 k 個條件變異數對應的買權價格 $C_{T-1}^a(i, k)$ 為：

$$C_{T-1}^a(i, k) = S_{T-1}^a(i, k)N(d_1) - Xe^{-r\tau}N(d_2) \quad (11)$$

其中， $d_1 = \frac{\ln(\frac{S_{T-1}^a(i, k)}{X}) + (r + \frac{1}{2}\sigma(i, k)^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$ ， $d_2 = d_1 - \sigma(i, k)\sqrt{\tau}$ 。在此 $\sigma(i, k)$ 為根據條件變異數為 $h_{t-1}^a(i, k)$ 年化的價格波動性， τ 為選擇權年化的存續期間（僅餘一期）。 $N(\cdot)$ 為標準常態分配的累積機率函數。

四、回溯推算期初的選擇權理論價格

我們利用 BS 模型公式直接計算到期前一期各種資產價格下的選擇權價格之後，接著即可逐期向前回溯推算至期初的選擇權理論價格。TBS 建構三元樹節點時，僅記錄到達此節點之條件變異數的最大值與最小值。在估算選擇權價格時，方以內插法估計介於最大值與最小值之間的 K 個條件變異數，來估計選擇權價格。基於此，第 t 期任一節點上的變異數，僅來自於第 $(t-1)$ 期各節點處條件變異數的最大值與最小值。因此在節點 (t, i) 的位置上，若給定條件變異數為 $h_t^a(i, k)$ ，我們可以反推出次期（亦即 $t+1$ 期）的條件變異數為：

$$\hat{h}_{t+1}(j) = \beta_0 + \beta_1 h_t^a(i, k) + \beta_2 h_t^a(i, k) \left[\frac{\left(j\eta\gamma_n - \left(r_f - \frac{1}{2} h_t^a(i, k) \right) \right)}{\sqrt{h_t^a(i, k)}} - c^* \right]^2 \tag{12}$$

$j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$

然而節點 $(t+1, i + j\eta)$ 只存放了 K 個條件變異數，因此必須以內插法決定 $\hat{h}_{t+1}(j)$ 對應的選擇權價值。假設 $\hat{h}_{t+1}(j)$ 落在節點 $(t+1, i + j\eta)$ 的第 L 個及第 $L+1$ 個條件變異數之間，則 $\hat{h}_{t+1}(j)$ 對應的買權價值為：

$$C^{\text{interp}}(j) = q(j) C_{t+1}^a(i + j\eta, L) + (1 - q(j)) C_{t+1}^a(i + j\eta, L + 1) \tag{13}$$

$$\text{其中， } q(j) = \frac{h_{t+1}^a(i + j\eta, L + 1) - \hat{h}_{t+1}(j)}{h_{t+1}^a(i + j\eta, L + 1) - h_{t+1}^a(i + j\eta, L)} \tag{14}$$

故在節點 (t, i) 的位置上，第 k 個條件變異數對應的買權價格為：

$$C_t^a(i, k) = e^{-r} \sum_{j=-n}^n P(j) C^{\text{interp}}(j) \tag{15}$$

$$\text{其中， } P(j) = \sum_{j_u, j_m, j_d} \binom{n}{j_u, j_m, j_d} p_u^{j_u} p_m^{j_m} p_d^{j_d}, \quad j_u, j_m, j_d \geq 0, \quad n = j_u + j_m + j_d, \quad j = j_u - j_d \tag{16}$$

， p_u 、 p_m 和 p_d 分別表示三元樹中上升、持平與下跌的機率：

$$p_u = \frac{h_t^a}{2 n \eta^2 \gamma_n^2} + \frac{\left(r - \frac{1}{2} h_t^a \right) \sqrt{1/n}}{2 \eta \gamma_n} \tag{17}$$

$$p_m = 1 - \frac{h_t^a}{\eta^2 \gamma_n^2} \tag{18}$$

$$p_d = \frac{h_t^a}{2\eta^2\gamma_n^2} - \frac{(r - \frac{1}{2}h_t^a)\sqrt{1/n}}{2\eta\gamma_n} \quad (19)$$

這三項機率公式來自 RT(1999)，其詳細的推導過程請參見 RT(1999)中的 Appendix。

若應用於評價美式買權，則必須判斷買權到期前在各節點提前履約是否有利，亦即買權的價格必須滿足以下條件：

$$C_t^a(i,k) = \text{Max}\{C_t^{a \text{ stop}}(i,k), C_t^{a \text{ go}}(i,k)\} \quad (20)$$

其中， $C_t^{a \text{ go}}(i,k) = e^{-r} \sum_{j=-n}^n p(j) c^{\text{interp}}(j)$ 代表買權不提前履約的價值， $C_t^{a \text{ stop}}(i,k) = \text{Max}\{S_t^a(i) - X, 0\}$ 代表買權提前履約的價值。

五、舉例說明 TBS 演算法的操作程序

因為 TBS 演算法在到期日前一天即直接以 BS 公式計算選擇權價格，所以我們無需估計期末的資產價格，也無需估計選擇權到期日的內含價值，更無需由期末逆向回溯推估到期前一天的選擇權價格，因此可以節省運算時間，尤其對於較長期的選擇權尤為顯著。同時，當處理大量交易資料時 TBS 演算法確有節省時間的優勢，更符合交易實務上的實際需求。

以下本文舉例說明 TBS 演算法的具體作法：若一價平買權 (at-the-money call) 其距到期日期間為 3 天 (亦即 $T=3$)，假設在其距到期日期間內每一交易日切割 1 期 (亦即令 $n=1$)，令 $K=3$ ，且假設在第 0 期時， $S_0=\$1,000$ (即 $\ln S_0=\$6.9078$)， $X=1,000$ 。且 NGARCH 模型的相關參數為 $\lambda=0$ ， $\beta_0=6.575 \times 10^{-6}$ ， $\beta_1=.09$ ， $\beta_2=.04$ ， $r=0$ ， $c=0$ ， $h_0=.0001096$ (年波動性 20%) 及 $\gamma=\sqrt{h_0}=0.0105$ 。

首先在圖 1 中當 $t=0$ 時，我們可由 $(\eta-1) < \frac{\sqrt{h_t^a}}{\gamma} \leq \eta$ 求算出下一期 ($t=1$) 的跳躍參數值 η 值為 1，接著再由(8)、(9)式算出下一期的三個條件變異數分別為 10.9645×10^{-5} 、 10.5215×10^{-5} 和 10.953×10^{-5} ，然後我們可以由 $S_t^a(i,k) = e^{y_t^a(i,k)}$ 算出下一期對應的三個資產價格分別為 $\$1,010.52$ 、 $\$1,000$ 和 $\$989.59$ 。再將第 1 期的三個條件變異數分別代入 $(\eta-1) < \frac{\sqrt{h_t^a}}{\gamma} \leq \eta$ 求算出下一期的 3 ($=2 \times 1 + 1$) 個跳躍參數值，分別是 $\eta_{up} = 2$ 、 $\eta_{middle} = 1$ 和 $\eta_{down} = 1$ 。其中跳躍參數 $\eta = 2$ 顯示為了使樹狀圖的節點重合，則必須產

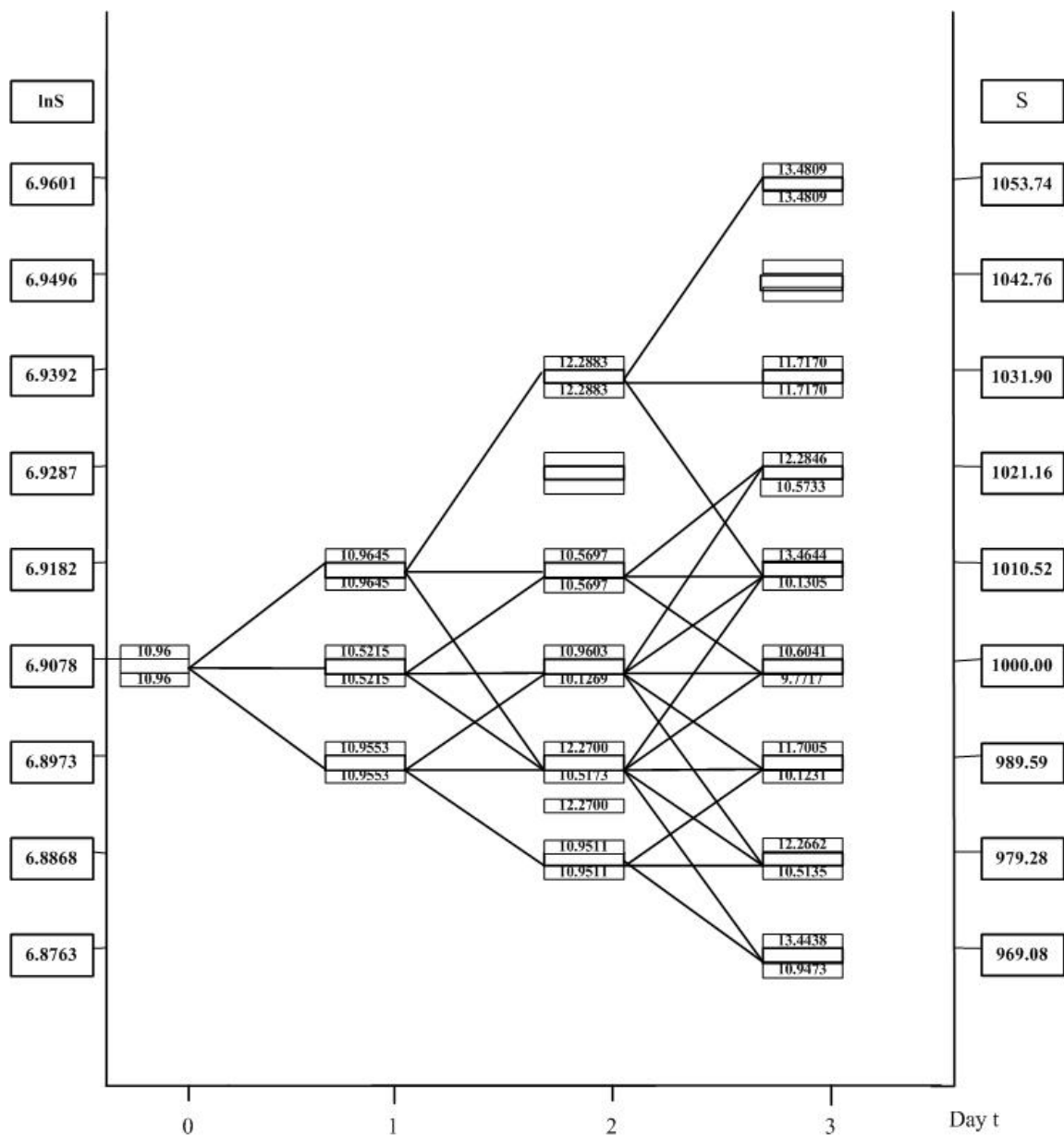


圖 1 RTCT 樹狀圖

此圖為三期 RTCT 樹狀圖，假設資產價格波動性行程服從 NGARCH，模型參數設定為 $r=0$ ， $\lambda=0$ ， $\beta_0=6.575 \times 10^{-6}$ ， $\beta_1=.09$ ， $\beta_2=.04$ ， $c=0$ ， $S_0=1000$ ， $h_0=.0001096$ (年波動性 20%) 及 $n=1$ 和 $\gamma = \sqrt{h_0}$ 。圖中每一節點有 2 個數值：每欄上面 (下面) 的數值為到達此節點之所有路徑的最大 (最小) 變異數。y 軸的 S 與 lnS 即為所對應的資產價格與對數化資產價格。

生跳空的情況，此時其對應的三個資產價格分別為\$1010.52、\$1031.90 (=1010.52+2 (10.5215×10⁻⁵)) 和\$989.59 (=1010.52-2 (10.5215×10⁻⁵))，同樣利用(8)、(9)式算出下一期的三個條件變異數為 12.2697×10⁻⁵、12.2883×10⁻⁵ 和 10.5173×10⁻⁵，再由 $S_i^a(i,k) = e^{y_i^a(i,k)}$ 算出對應的資產價格，以此類推藉以建構資產價格的樹狀圖，但是在每個節點僅儲存條件變異數的最大值與最小值。

若是利用 RTCT 三元樹演算法，如圖 1 所示，樹狀圖必須完整描繪至到期日 ($t=3$) 為止，再逆向回溯推估選擇權理論價格。而利用 TBS 演算法在建構樹狀圖時，則如圖 2 所示僅需描繪至到期日前一天 ($t=2$) 為止，接著即可利用 BS 模型公式直接估計當天 ($t=2$) 在各種資產價格下的選擇權價格，然後再直接逆向回溯以推估至期初 ($t=0$) 的選擇權價格。如此將可節省樹狀圖推算至到期日 ($t=3$) 的時間以及由到期日 ($t=3$) 逆向回溯推估 $t=2$ 時選擇權價格的時間，應可使計算上更具效率。接著我們由到期日前一天 ($t=2$) 開始回溯推估選擇權價格。由於在 $t=2$ 時所有節點的選擇權價格可直接以 BS 公式求出，因此我們僅需估計 $t=1$ 時所有節點的選擇權價格。接著利用(17)式到(19)式求算節點發生機率，則可推算期初的買權價格為\$6.6345。

參、數值模擬分析

TBS 選擇權演算法是以 RTCT 樹狀圖法為基礎，在選擇權到期日前一天搭配 BS 模型的公式解，理論上應該可以提升評價收斂速度。為印證我們的預期，本節以數值模擬評估 TBS 演算法在選擇權評價上的適用性。

我們採用 RT (1999) 與 Cakici and Topyan (2000) 文中的參數設定，利用 TBS 演算法模擬買權與賣權的理論價，再與 RTCT 演算法的模擬結果比較。關於 RTCT 演算法的模擬結果皆直接引用 Cakici and Topyan (2000) 的數據。首先 TBS 演算法對於價平買權的模擬結果列於表 1，我們可以由表中得知在八個不同距到期日期間的情況下，TBS 演算法與 RTCT 演算法的模擬結果不相上下，模擬結果中各只有一個模擬價格超過理論價的上下限，因此 TBS 演算法並不遜於 RTCT 演算法。

其次，表 2 是分析 K 值對 TBS 演算法收斂速度的影響，以價平買權為例，我們可以發現較大的 K 值可以提高演算法的收斂速度，因此當設定 $n=1$ 時只要搭配夠大的 K 值，TBS 演算法已經呈現顯著的收斂性。這個結果同樣顯示 TBS 演算法的收斂性並不遜於 RTCT 演算法。

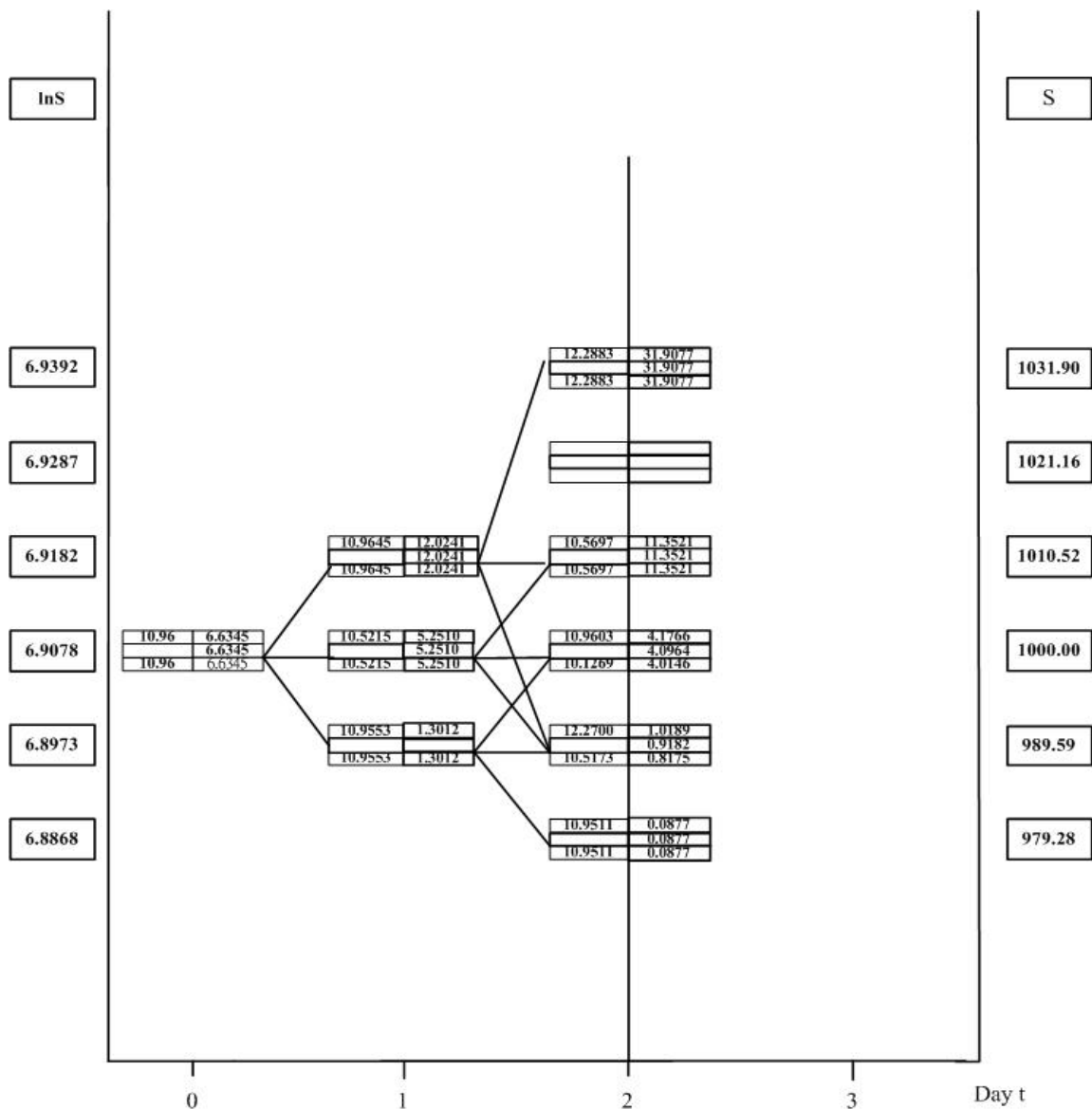


圖 2 TBS 選擇權樹狀圖演算法

此圖為三期歐式價內買權之 TBS 演算法。假設資產價格波動性行程服從 NGARCH，模型參數設定為 $r=0$ ， $\lambda=0$ ， $\beta_0=6.575 \times 10^{-6}$ ， $\beta_1=.09$ ， $\beta_2=.04$ ， $c=0$ ， $X=S_0=1000$ ， $h_0=.0001096$ （年波動性 20%）及 $n=1$ 和 $\gamma = \sqrt{h_0}$ 。圖中每一節點有 5 個數值。在第一欄上面（下面）的數值為到達此節點之所有路徑的最大（最小）變異數。在此例中 $K=3$ ，所以在每個節點會有 3 個選擇權值（在第二欄中）。在第二欄最上面（下面）之值為最大（最小）變異數所對應之選擇權值，中間的選擇權值為中間變異數（最大與最小變異數之平均）所對應的選擇權值。TBS 演算法在 $t=2$ 時，直接利用 BS 公式推算出選擇權價格，再回溯推算期初選擇權價格。

表 1 TBS 演算法對價平買權估價的數值模擬結果

K=20	買權距到期日期間 (天)							
	2	5	10	20	50	75	100	200
TBS	0.589	0.930	1.308	1.857	2.942	3.606*	4.165	5.893
RTCT	0.588	0.909*	1.312	1.857	2.942	3.604	4.165	5.893
∞L	0.587	0.923	1.306	1.846	2.918	3.573	4.142	5.862
∞U	0.592	0.931	1.317	1.862	2.944	3.605	4.179	5.916

表中所列之值為在 NGARCH 模型參數 $r=0$, $\lambda=0$, $\beta_0=6.575 \times 10^{-6}$, $\beta_1=.09$, $\beta_2=.04$, $c=0$, $X=S_0=100$, $h_0=.0001096$ (年波動性 20%) 及固定 $n=1$ 、 $K=20$ 和 $\gamma = \sqrt{h_0}$ 之下, 分別利用 RTCT 演算法與 TBS 演算法所模擬之價平買權理論價。 ∞L 與 ∞U 分別是買權價格的上下限, 其數值引自 Cakici and Topyan (2000) 文章內表 1 的模擬結果。* 表示演算法所模擬的理論價超過買權價格的上下限。

表 2 TBS 演算法在不同 K 值下對價平買權估價的收斂性

K	距到期日期間 (天)							
	2	5	10	20	50	100	200	
3	0.588	0.927	1.311	1.849	2.941	4.165	5.893	
5	0.588	0.926	1.313	1.855	2.942	4.162		
10	0.588	0.929	1.309	1.857	2.942			
20		0.930	1.308	1.857	2.942			
30		0.930	1.308	1.857				
40			1.308					
50								
∞L	0.580	0.922	1.313	1.854	2.932	4.149	5.804	
∞U	0.591	0.939	1.338	1.890	2.989	4.231	5.922	

表中所列之值為在 NGARCH 模型參數 $\lambda=0$, $\beta_0=6.575 \times 10^{-6}$, $\beta_1=.09$, $\beta_2=.04$, $r=10\%$, $c=0$, $X=S_0=100$, $h_0=.0001096$ (年波動性 20%) 及固定 $n=1$ 和 $\gamma = \sqrt{h_0}$ 之下, 利用 TBS 樹狀圖演算法所模擬之歐式價平買權理論價。 ∞L 與 ∞U 分別是買權價格的上下限, 其數值皆引自 Cakici and Topyan (2000) 表 3。

表 3 TBS 演算法對不同價內外程度賣權估價的收斂性

K	T=5 天			T=30 天			T=90 天		
	X=95	X=100	X=105	X=95	X=100	X=105	X=95	X=100	X=105
3	0.278	1.788	5.289	1.407	3.334	6.419	2.320	4.368	7.287
5	0.278	1.788	5.289	1.409	3.337	6.420	2.325	4.373	7.295
10	0.278	1.788	5.289	1.409	3.337	6.421	2.329	4.373	7.312
20				1.409	3.337	6.421	2.331	4.373	7.312
30						6.421	2.331		7.312
40							2.331		

表中所列之值為在 NGARCH 模型參數 $r=6\%$, $\lambda=0$, $\beta_0=6.575 \times 10^{-6}$, $\beta_1=.09$, $\beta_2=.04$, $c=0$, $S_0=100$, $h_0=0.0002108$ (年波動性 40%), $n=1$ 和 $\gamma = \sqrt{h_0}$ 之下, 利用 TBS 樹狀圖演算法所模擬之賣權理論價。NGARCH 模型參數值引自 Cakici and Topyan (2000)。

最後, 我們測試 TBS 演算法對不同價內外程度賣權的評價績效。表 3 顯示無論選擇權的存續期間長短, 對於價內或價外的賣權, TBS 演算法皆呈現顯著的收斂性。綜言之由數值模擬中可知, 由於 TBS 演算法呈現顯著的收斂性, 應可為實務上可考慮採行之 GARCH 型選擇權評價方法。下一節本文將說明 TBS 演算法在台灣認購權證市場的應用結果。

肆、樣本資料與評價實證結果

本節說明台灣美式認購權證市場資料, 以 TBS 演算法評估認購權證理論價格的步驟, 以及評價的實證結果分析。

一、樣本資料說明

本文以台灣認購權證市場資料配適 TBS 演算法, 藉以評估此方法在選擇權評價上的適用性。樣本權證取樣的原則是從 2002 年 1 月至 2003 年 7 月樣本期間內, 已經在台灣證交所成功發行並且到期下市的個股型認購權證, 共計有 29 檔, 其基本資料整

理於表 4。各樣本認購權證之分析期間是該權證之存續期間（自權證發行上市至到期

表 4 樣本認購權證基本資料與各標的股票之 NGARCH 模型參數估計

$$\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) = r - \frac{1}{2}h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}}\varepsilon_{t+1}$$

$$h_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 h_t (\varepsilon_{t+1} - c - \lambda)^2$$

$$\varepsilon_{t+1} \mid F_t \sim N(0, 1)$$

權證名稱	標的股票	上市日	到期日	履約價格	交易天數	β_0	β_1	β_2	$c + \lambda$	h^*
富邦 15	遠紡	2002/03/15	2003/03/14	15.25	250	1.9869E-04	0.6856353	0.1615456	0.0179478	0.0013388
日盛 19	太電	2002/03/15	2003/03/14	10.53	246	2.1766E-04	0.5963580	0.1778282	0.0443425	0.0010154
統一 18	神達	2002/03/15	2003/03/14	28.2	247	2.9542E-04	0.6497430	0.1502236	0.1041623	0.0010588
統一 19	東元	2002/03/18	2003/03/17	21.52	247	2.3378E-04	0.5370702	0.1971026	0.2397732	0.0010439
中信 13	臺化	2002/03/20	2003/03/19	57.15	247	2.2337E-04	0.6394094	0.1631697	0.1042622	0.0011034
統一 21	太電	2002/03/20	2003/03/19	12.45	247	2.4175E-04	0.5762146	0.1690270	0.0921694	0.0008161
寶來 24	友訊	2002/03/21	2003/03/20	89.05	247	6.4677E-05	0.9299482	0.0283508	0.1754088	0.0013993
群益 16	臺塑	2002/03/26	2003/03/25	69.9	247	1.6722E-05	0.9207619	0.0612595	0.0154331	0.0008218
日盛 20	威盛	2002/03/26	2003/03/25	203.7	247	5.8162E-05	0.8269224	0.1183806	0.2469969	0.0006027
富邦 16	神達	2002/03/27	2003/03/26	24.6	247	2.0354E-04	0.6947260	0.1612355	0.1231373	0.0007702
大華 19	中信銀	2002/03/27	2003/03/26	29.79	237	7.6737E-05	0.7813877	0.1317896	0.1265961	0.0007222
群益 17	瑞昱	2002/03/28	2003/03/27	280.5	247	6.4529E-05	0.8522499	0.0545336	0.7946913	0.0006658
群益 18	臺化	2002/04/01	2003/03/31	57.15	246	2.1418E-04	0.6654914	0.1419702	0.0739551	0.0009645
台証 05	東元	2002/04/01	2003/03/31	22.95	247	2.6421E-04	0.5043076	0.1891979	0.3154209	0.0007496
統一 22	精業	2002/04/08	2003/04/07	52.05	248	1.5467E-04	0.8257883	0.0357248	0.4509404	0.0010286
台証 06	廣達	2002/04/10	2003/04/09	201	248	3.5429E-05	0.7926481	0.1555194	0.4557586	0.0010180
群益 19	明基	2002/04/12	2003/04/11	114	248	4.8899E-05	0.8933752	0.0640293	0.1831844	0.0007088
元大 43	正新	2002/04/16	2003/04/15	31.25	244	5.5292E-05	0.8290983	0.0602870	0.5816366	0.0005130
日盛 21	建華金	2002/04/17	2003/04/16	23.55	238	1.2371E-04	0.6679934	0.1285382	0.3108744	0.0005960
日盛 22	華宇	2002/04/18	2003/04/17	44.1	248	2.0149E-04	0.7533394	0.0962156	0.2089046	0.0010310
金鼎 08	雅新	2002/04/29	2003/04/28	71.5	248	1.8439E-04	0.6821817	0.1528673	0.2389272	0.0006908
金鼎 09	華南金	2002/05/10	2003/05/09	27.2	248	6.1876E-05	0.7593193	0.1724956	0.1305492	0.0017157
群益 20	華南金	2002/07/12	2003/07/11	42.75	247	6.1876E-05	0.7593193	0.1724956	0.1305492	0.0017157
元大 61	中鋼	2002/12/16	2003/06/15	23.75	119	1.1918E-05	0.3922222	0.0046189	0.1133793	0.0005820
元大 62	中鋼	2002/12/17	2003/06/16	29.1	118	1.1918E-05	0.3922222	0.0046189	0.1133793	0.0005820
元大 63	台新金	2002/12/24	2003/06/23	22.12	118	3.1020E-04	0.3898702	0.1837234	0.0820246	0.0005826
元大 64	統一	2003/01/03	2003/07/02	14.43	118	2.7303E-04	0.2589157	0.1096493	0.4689031	0.0004384
信銀 02	富邦金	2003/01/10	2003/07/09	30.8	118	3.6336E-04	0.5525134	0.1275990	0.3028825	0.0003750
元大 65	華碩	2003/01/16	2003/07/15	61.5	118	2.3180E-06	0.5685359	0.0055289	0.8660126	0.0006192

本文的樣本為個股型美式認購權證，原始執行比例為 1:1，即每單位認購權證可認購一股標的股票。 h^* 代表標的股票的穩態變異數，在此作為標的股票 NGARCH 行程變異數之起始值，即 $h^* =$

$\beta_0 \{1 - \beta_1 - \beta_2 (1 + (c + \lambda)^2)\}^{-1}$ 。無風險利率值是權證發行時臺灣銀行一年期定存利率。

下市的期間)，樣本權證的存續期間除元大 61、元大 62、元大 63、元大 64、信銀 02 與元大 65 為半年之外其餘皆為一年。相較於一般的選擇權契約，認購權證的存續期間較長，因此我們參考 Duan and Zhang (2001) 對長期選擇權契約的取樣方式，僅估計每週三的權證理論價格，並對應記錄每週三的認購權證市價，若週三無交易，則以週四的資料替代。認購權證的契約規格及其標的股票之價格資料均取自台灣經濟新報資料庫 (TEJ) 與各發行券商之權證公開銷售說明書。

二、NGARCH 模型參數估計

根據 Heston and Nandi (2000) 與 Hsieh and Ritchken (2000) 的作法，以標的資產歷史資料所估計出的 NGARCH 模型參數，若符合穩態過程 (stationary process)，則用來估計樣本外資料，與將歷史資料平移再進行樣本內估計，二者所估得的數值與真實值的均方差 (MSE, mean square error) 差異不大。因此為簡化估計程序，本文對 NGARCH 模型係數的估計方式乃以標的股票在權證發行日前一年報酬率資料估計 NGARCH 模型參數，做為各標的股票價格行程的起始參數值。此 29 檔認購權證其標的股票的 NGARCH 模型參數列於表 4，由表中可以得知模型參數的特性與 Engle and Ng (1993) 的實證結果一致，亦即 $\beta_0 > 0$ ， $\beta_1 \geq 0$ ， $\beta_2 \geq 0$ 且 $\beta_1 + \beta_2(1 + c^2) < 1$ 。模型中的槓桿參數 c 與風險貼水值 λ 的總和，對標的股票價格的未來走勢具有影響力，但在風險中立機率測度 Q 下，我們無法分別估計此二係數，所以表 4 呈現出來的是此二參數的加總。Duan (1995) 指出 NGARCH 模型在風險中立機率測度 Q 之下，穩態變異數 (h^*) 為 $\beta_0 \{1 - \beta_1 - \beta_2 (1 + (c + \lambda)^2)\}^{-1}$ ，在此我們將它做為 NGARCH 評價模型的起始變異數 h_0 。無風險利率是以台灣銀行一年期定期存款利率替代。此外，在進行 RTCT 法與 TBS 演算法評價選擇權資料時，必須先行設定選擇權到期前每一日的分割期數 n 值，與每個節點所存放的條件變異數個數 K 值 ($K \geq 3$)。根據本文第參節的的模擬，設定 $n=1$ 時 TBS 演算法對於選擇權已經有很令人滿意的評價結果，因此本文實證時設定 $n=1$ ；同時為節省運算時間，本文設定 $K=3$ 。

三、評價實證結果分析

首先我們比較不同演算法在相同條件下的評價速度，我們紀錄每檔權證每個契約的評價時間，限於篇幅本文未能列出。如所預期，TBS 演算法的評價速度皆快於 RTCT

樹狀圖演算法。同時受限於電腦效能與程式能力之差異，觀察每個樣本契約的運算時間並無意義，但是比較不同演算法相對的運算速度則有其涵義。本文以元大 63 及富邦 15 此二檔權證為例，將 RTCT 樹狀圖法及 TBS 演算法估計每週三理論價格的所需時間繪成圖 3。因元大 63 此檔權證之存續期間為半年，故需求算約 26 筆理論價格，

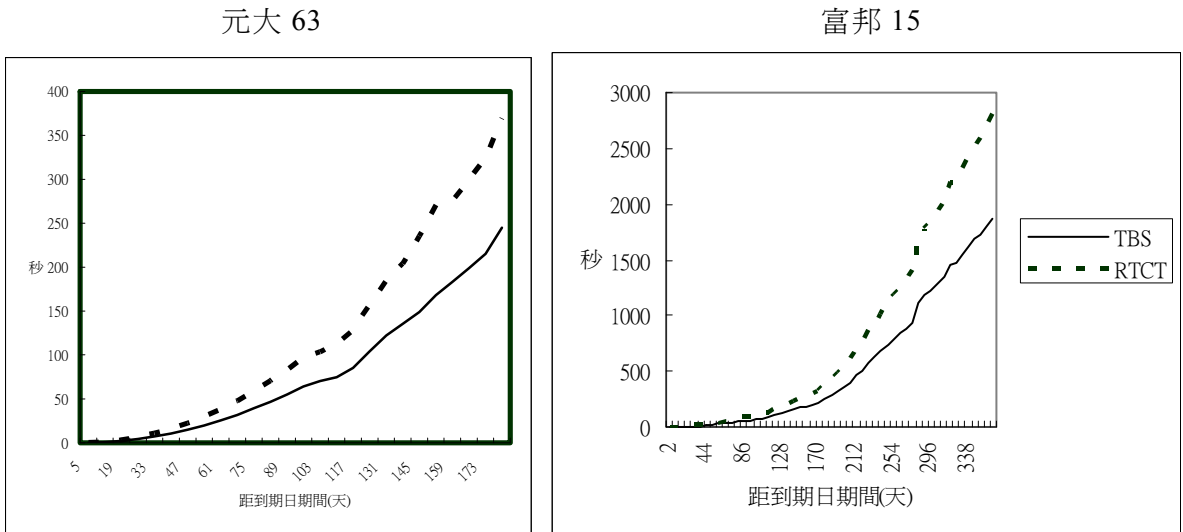


圖 3 TBS 演算法與 RTCT 演算法運算時間比較

本圖分別以元大 63 與富邦 15 二檔權證為例，說明在不同距到期日期間以理論演算法求算每筆理論價格之所需時間。其中元大 63 之存續期間為半年（26 筆理論價格），富邦 15 之存續期間為一年（52 筆理論價格）。模型參數設定為 $n=1$ ， $K=3$ ，NGARCH 模型參數則見表 4。

而富邦 15 此檔權證之存續期間為一年，故需求算約 52 筆理論價格。由圖 3 可知 TBS 演算法在評價速度方面，的確相對優於 RTCT 三元樹模型；而且當權證的存續期間愈長時，TBS 演算法運算速度的優勢愈顯著。

其次分析不同演算法在相同條件下的準確性，我們記錄理論價格與權證市價的價差（price difference）與價差百分比於表 5。由表中可以得知 TBS 演算法以及 RTCT 演算法二者的評價結果皆低估了權證價格，其中 RTCT 演算法低估的情形較顯著。就價差百分比指標而言，RTCT 演算法的評價誤差，除大華 19（中信銀）及信銀 02（富邦金）外，其餘皆在 5% 內；而 TBS 演算法的評價誤差，除大華 19 及信銀 02 外，其餘皆在 3% 內。因此，在此評比基礎下，本文所提出的 TBS 演算法在認購權證評價的

準確性，確實優於 RTCT 三元樹法及 BS 模型。

接著就相對評價績效而言，本文將 TBS 演算法對 RTCT 演算法在認購權證評價上的相對績效整理於表 6。首先我們將認購權證的市價當做參考值 (benchmark)，分別計算 TBS 演算法在週資料基礎下的均方差 (MSE)，分別以 MSE_{TBS} 與 MSE_{RTCT} 表示。

表 5 各估價模型估計的理論價格與權證市價之價差比較

權證名稱		富邦 15	日盛 19	統一 18	統一 19	中信 13	統一 21	寶來 24	群益 16	日盛 20	富邦 16
RTCT	價差平均值(元)	-0.089	-0.091	-0.090	-0.096	-0.090	-0.090	-0.089	-0.090	-0.076	-0.092
	價差百分比(%)	-1.886	-1.887	-1.889	-1.923	-1.923	-1.923	-1.960	-1.923	-1.923	-1.923
TBS	價差平均值(元)	-0.038	-0.039	-0.041	-0.046	-0.041	-0.041	-0.049	-0.041	-0.026	-0.043
	價差百分比(%)	-1.046	-1.049	-1.051	-1.067	-1.068	-1.061	-1.089	-1.071	-1.068	-1.067
權證名稱		大華 19	群益 17	群益 18	台證 05	統一 22	台證 06	群益 19	元大 43	日盛 21	日盛 22
RTCT	價差平均值(元)	-0.058	-0.076	-0.092	-0.096	-0.080	-0.084	-0.086	-0.082	-0.094	-0.089
	價差百分比(%)	-7.678	-1.961	-1.923	-1.923	-1.923	-1.923	-1.923	-0.477	-2.041	-1.961
TBS	價差平均值(元)	-0.008	-0.026	-0.042	-0.046	-0.030	-0.034	-0.036	-0.032	-0.044	-0.039
	價差百分比(%)	-4.266	-1.089	-1.068	-1.073	-1.052	-1.068	-1.065	-0.265	-1.134	-1.089
權證名稱		金鼎 08	金鼎 09	群益 20	元大 61	元大 62	元大 63	元大 64	信銀 02	元大 65	
RTCT	價差平均值(元)	-0.073	-0.089	-0.089	-0.039	-0.192	-0.238	-0.286	-0.040	-1.423	
	價差百分比(%)	-1.961	-1.923	-1.923	-2.633	-3.846	-4.762	-4.136	-7.998	-4.122	
TBS	價差平均值(元)	-0.023	-0.039	-0.039	-0.028	-0.142	-0.188	-0.193	-0.002	-1.254	
	價差百分比(%)	-1.089	-1.068	-1.054	-1.463	-2.137	-2.646	-2.223	-4.443	-2.213	

說明: 1. 價差的定義為 (理論價格-市場實際交易價格)。

2. 價差百分比即 $[(\hat{C}_{it} - C_{it}) / C_{it}] \times 100\%$ ，其中 C_{it} 代表市價， \hat{C}_{it} 代表權證 i 在時點 t 的理論價格，數據中所表現的是偏離百分比的平均值。

表 6 TBS 演算法對認購權證的評價績效

權證名稱	富邦 15	日盛 19	統一 18	統一 19	中信 13	統一 21	寶來 24	群益 16	日盛 20	富邦 16
$\ln (MSE_{TBS}/MSE_{RTCT})$	-2.443	-1.998	-1.820	-3.022	-4.124	-4.228	-2.864	-2.347	-2.788	-3.864
<i>Wins</i>	0.868*	0.880*	0.826*	0.896*	0.857*	0.902*	0.896*	0.873*	0.822*	0.904*
權證名稱	大華 19	群益 17	群益 18	台證 05	統一 22	台證 06	群益 19	元大 43	日盛 21	日盛 22
$\ln (MSE_{TBS}/MSE_{RTCT})$	-2.284	-3.667	-2.826	-2.874	-4.613	-3.476	-3.661	-2.994	-2.006	-4.264
<i>Wins</i>	0.866*	0.871*	0.844*	0.812*	0.822*	0.889*	0.872*	0.796*	0.912*	0.798*
權證名稱	金鼎 08	金鼎 09	群益 20	元大 61	元大 62	元大 63	元大 64	信銀 02	元大 65	
$\ln (MSE_{TBS}/MSE_{RTCT})$	-3.345	-3.989	-3.258	-2.743	-3.214	-3.648	-4.112	-3.641	-2.884	
<i>Wins</i>	0.801*	0.812*	0.865*	0.822*	0.936*	0.876*	0.896*	0.903*	0.832*	

若 $\ln(MSE_{TBS}/MSE_{RTCT})$ 為負，則代表 TBS 演算法的評價結果較 RTCT 演算法更接近市價。即代表 TBS 演算法評價績效較優。” *Wins*”代表在每週評比基礎下，TBS 演算法理論價格相對接近市價的次數比例。以富邦 15 為例，TBS 演算法在 53 個樣本點中，共有 46 個樣本點的評價結果比 RTCT 演算法更接近市價，因此其 $Wins = 46/53 = 0.868$ ，若 $Wins > 0.5$ ，表示 TBS 演算法的評價績效相對優於 RTCT 演算法。其中*表示在 5%顯著水準下，拒絕虛無假設 $H_0: Wins \leq 0.5$ 。

MSE 的計算公式為：

$$MSE = \frac{\sum_{t=1}^m (\hat{C}_t - C_t)^2}{m} \quad (21)$$

其中 \hat{C}_t 表權證理論價格， C_t 表權證市價， m 為每檔權證的樣本數。MSE 表示理論價格對市價之殘差變異數，是最常用的指標。此值對於較大的誤差值給予較大的平方加權，如此可以得到較合理的比較基礎。若某演算法的 MSE 值愈大，則代表其評價績效愈差。接著我們計算個別權證在不同評價法之下的相對衡量誤差，即 $\ln(\frac{MSE_{TBS}}{MSE_{RTCT}})$ 。若 $\ln(\frac{MSE_{TBS}}{MSE_{RTCT}})$ 為負值，則表示 TBS 演算法相對優於 RTCT 演算法，由表 7 亦可得知各檔權證的 $\ln(\frac{MSE_{TBS}}{MSE_{RTCT}})$ 皆為負值，此一結果顯示 TBS 樹狀圖演算法的評價績效相對優於 RTCT 演算法。綜言之，以認購權證的市價當做參考值，本文提出的 TBS 演算法呈現相對較佳的評價績效。

由於評價模型的績效不佳可能是由於某些極端誤差 (outliers) 所造成的，因此我們分別記錄 TBS 演算法理論價格較 RTCT 演算法理論價格更接近市場價格的次數比例。亦即估計值相對接近市場實際價格的次數比例，以 *Wins* 代表此比例值，同樣列於表 6 中。由表中可知相較於 RTCT 演算法，就 TBS 演算法的 *Wins* 值皆大於 0.796，意即在每 100 次估計中，約有 79 次 TBS 演算法皆比 RTCT 演算法更接近認購權證市價，可知 TBS 演算法的評價績效優於 RTCT 演算法。這個結果與其他評價誤差指標的分析結果具有一致性。

五、頑強性測試³ (Robustness Test)

為強化對 TBS 演算法評價績效的推論，本文亦採用臺指選擇權 (TAIEX options，代號 TXO) 為配適對象，同樣相對於 RTCT 演算法的評價結果進行比較。臺指選擇權是以台灣證交所發行量加權股價指數 (TAIEX) 作為標的物之歐式選擇權契約，而且

同時有買權與賣權，因此我們可藉此瞭解 TBS 演算法在賣權評價上適用性。鑒於流動性之考量，本文選取 2002 年 1 月至 2002 年 12 月臺指選擇權的近期契約為配適對象，根據 Dumas, Fleming, and Whaley (1998) 與 Heston and Nandi (2000) 的作法，我們進一步剔除價內外程度 (moneyness) 大於 10% 或小於 -10% 的樣本，亦即剔除 $(S_t/X)-1 > 10\%$ 或 $(S_t/X)-1 < -10\%$ 之樣本，其中 S_t 為時點 t 的現貨指數， X 為台指選擇權履約價。由於台指選擇權市場之收盤時間較股票市場之收盤時間晚 15 分鐘，為避免非同步交易 (non-synchronous trading) 的問題，本文以股票市場的收盤時間 (1:30p.m.)

表 7 臺指選擇權樣本

7.1 臺指買權

S_t/X	<0.94	0.94~0.97	0.97~1.03	1.03~1.06	>1.06	樣本數
	深度價外	價外	價平	價內	深度價內	
2002/1	0	0	6	8	5	19
2002/2	0	0	4	4	3	11
2002/3	0	4	18	6	5	33
2002/4	0	0	26	8	2	36
2002/5	8	7	20	7	0	42
2002/6	17	31	25	0	0	73
2002/7	11	16	45	9	1	82
2002/8	36	28	30	1	0	95
2002/9	8	14	36	3	1	62
2002/10	20	15	22	4	1	62
2002/11	0	0	8	12	24	44
2002/12	0	7	50	14	6	77
樣本數	100	122	270	76	48	636

以加權股價指數在時點 t 的收盤價格為基準，依價內外程度 (S_t/X) 將買權樣本分為深度價外 (deep out-of-the-money, $S_t/X < 0.94$)、價外 (out-of-the-money, $S_t/X = 0.94 \sim 0.97$)、價平 (at-the-money, $S_t/X = 0.97 \sim 1.03$)、價內 (in-the-money, $S_t/X = 1.03 \sim 1.06$)、深度價內 (deep in-the-money, $S_t/X > 1.06$) 五組。其中以價平的買權觀察值為最多。

7.2 臺指賣權

S_t/X	<0.94	0.94~0.97	0.97~1.03	1.03~1.06	>1.06	樣本數
	深度價內	價內	價平	價外	深度價外	
2002/1	0	0	1	6	14	21
2002/2	0	0	1	8	7	16
2002/3	0	2	16	8	8	34
2002/4	0	0	25	16	4	45
2002/5	5	6	16	7	0	34
2002/6	7	12	21	0	0	40
2002/7	4	8	41	12	3	68
2002/8	6	11	24	3	0	44
2002/9	7	14	38	6	3	68
2002/10	12	10	22	4	1	49

2002/11	0	0	9	15	71	95
2002/12	0	7	50	23	12	92
樣本數	41	70	264	108	123	606

以加權股價指數在時點 t 的收盤價格為基準，依價內外程度 (S_t/X) 將賣權樣本分為深度價內 (deep in-the-money, $S_t/X < 0.94$)、價內 (in-the-money, $S_t/X = 0.94 \sim 0.97$)、價平 (at-the-money, $S_t/X = 0.97 \sim 1.03$)、價外 (out-of-the-money, $S_t/X = 1.03 \sim 1.06$)、深度價外 (deep out-of-the-money, $S_t/X > 1.06$) 五組。其中以價平的臺指賣權共有 264 筆觀察值為最多。

為準，對應取得選擇權契約當時之成交價。

台指選擇權價格及其標的現貨指數的資料皆取自台灣經濟新報資料庫 (TEJ)。在樣本期間內符合取樣標準的選擇權觀察值個數，買權有 1,324 個，賣權有 1,097 個。我們將樣本期間內每日最接近 1:30 p.m. 之買權與賣權觀察值個數、平均價格依價內外程度整理於表 7。由表 7 我們可觀察出，無論是買權或賣權樣本，深價外的樣本數最多，約佔所有樣本的五成；此外隨著存續期間縮短時，符合選樣標準的樣本個數越多。這些情況皆顯示本文樣本分佈頗能反映母體特性，具有足夠的代表性。

我們以股價指數的歷史波動率 (historical volatility) 作為 NGARCH (1,1) 模型的起始變異數 h_0 ；而且為提升評價績效，我們每個月重新估計一次 NGARCH (1,1) 參數以反應較新的價格資訊。本文逐一將 TBS 演算法與 RTCT 演算法的評價結果與臺指選擇權市價比較，其結果整理於表 8。由表中可知，整體而言對於深度價內的選擇權，各種演算法的評價誤差較小。而且無論對於買權或賣權，TBS 演算法優於 RTCT 演算法。此一結果與認購權證的配適結果一致，因此更加強化了本文的推論，顯示 TBS 選擇權樹狀圖演算法是台灣金融市場值得引用的方法之一。

伍、結論與建議

本文提出 Trinomial Black-Scholes (TBS) GARCH 選擇權評價演算法，乃以 RTCT 的樹狀圖 GARCH 選擇權演算法在到期日前一期結合 BS 公式解，藉以在不犧牲準度的前題下，加速評價的速度。我們首先以數值模擬進行驗證，結果支持 TBS 演算法的可行性，而且其收斂速度不遜於 RTCT 演算法。其次我們並以台灣證交所的美式認購權證市場資料配適 TBS 演算法，同樣與 RTCT 演算法比較，實證結果發現 TBS 演算法的運算速度與準確性皆較為優異，尤其對於較長期的選擇權尤為顯著；因此在處理

大量市場交易契約資料時，有其實用價值。最後我們再以臺指選擇權進行頑強性測試，其結果同樣支持 TBS 演算法在台灣金融市場的適用性。

關於後續的研究方面，我們建議進一步就演算法本身加以改進，應更能提升樹狀圖演算法的評價績效。修改的方向之一為考慮股價或波動性之跳躍特性，以跳躍模型捕捉標的股價的行程，理論上應能提升評價績效；或是將樹狀圖演算法結合 Figlewski and Cao (1999) 的適應性樹網模型 (adaptive mesh model, AMM)，以及 Lyuu and Wu (2003) 的均值追蹤法，應可更加快評價的收斂速度。

表 8 理論模型對台指選擇權的評價績效

			深度價外	價外	價平	價內	深度價內
買 權	價差	TBS	-1.4673	-1.2024	-0.87365	-0.6612	-0.5381
	百分比	RTCT	-1.4972	-1.2564	-0.91275	-0.6816	-0.5634
	$\ln(\text{MSE}_{\text{TBS}}/\text{MSE}_{\text{RTCT}})$		-0.8315	-1.3998	-0.7419	-0.8406	-0.4132
賣 權	價差	TBS	-1.5701	-1.4413	-1.1228	-0.8038	-0.5840
	百分比	RTCT	-1.6528	-1.4782	-1.1819	-0.8462	-0.6148
	$\ln(\text{MSE}_{\text{TBS}}/\text{MSE}_{\text{RTCT}})$		-0.8989	-1.0705	-0.9712	-0.9380	-0.9618

價差百分比是演算法或模型理論價格偏離台指選擇權市價百分比的平均值，即 $[(\hat{o}_n - o_n)/o_n] \times 100\%$ ，其中 O_n 代表台指選擇權市價， \hat{o}_n 代表理論價格。整體而言對於深度價內的選擇權，各種演算法的評價誤差較小。而且無論對於買權或賣權，TBS 演算法優於 RTCT 演算法。

註 釋

1. 若建立二元樹來模擬 GARCH 選擇權評價模型，會面臨兩個問題。首先，每個節點都要依其條件變異數的大小往上和往下伸展。但是，由於一期之後，條件變異數會隨所在的狀態而異，導致往上的節點接下去伸展的幅度不一定會與往下的節點接下去伸展的幅度相同，而無法重合。可以用三元樹代替二元樹解決。在建立二元樹時，未知數有：價格上升與下降的機率 (P_u, P_d)，以及價格變化量 (ΔS)，共三個未知數；要滿足的條件有：配合理論模型的期望值與變異數，並且機率總和為一，共三

個等式，三個未知數只能有唯一解， ΔS 會被唯一決定。但若建立三元樹，則未知數增加到四個 ($P_u, P_m, P_d, \Delta S$)，而方程式仍然只有三個，所以方程式解的自由度增加， ΔS 可以外生決定。因此建立三元樹，並適當地決定價格變化的幅度，可以使樹狀圖維持在相鄰價格差距均維持固定的情況下，仍然配合條件變異數在每一個節點都不相同的 GARCH 過程，解決路徑不重合的問題。

2. 一般而言，財務時間數列的資料，往往反應出波動性不對稱的現象；例如在報酬率干擾項的絕對量值一樣大時，若發生負項的報酬干擾，即 $v_t < 0$ ，往往招致比發生正項的干擾因子 $v_t > 0$ 所造成的波動性反應更大，此之謂不對稱性。文獻常以公司的財務槓桿程度來解釋造成此不對稱性的原因，因此稱為槓桿效果 (leverage effect)。
3. 頑強性測試的目的在於避免評價模型的表現會因為資料特性而改變 (data-dependence)，因此本文除了以美式認購權證之外，又採用台指選擇權作為配適樣本，藉以檢測 TBS GARCH 選擇權演算法的績效。

參考文獻

1. Amin, K. I. (1993). Jump diffusion option valuation in discrete time. Journal of Finance, 48(5), 1833-1863
2. Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy, 81, 637-659.
3. Bollerslev, T., Chou, R., & Kroner, K. F. (1992). ARCH modeling in finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence. Journal of Econometrics, 52(1), 5-59.
4. Broadie, M., & Detemple, J. B. (1996). American option valuation: New bounds, approximations, and a comparison of existing method. The Review of Financial Studies, 9, 1211-1250.
5. Cakici, N., & Topyan, K. (2000). The GARCH option pricing model: A lattice approach. Journal of Computational Finance, 3, 71-85.
6. Chang, C. C., Chung, S. L., & Richard, C. S. (2001). Richardson extrapolation techniques for pricing american-style options. Working Paper.

7. Chung, S. L., & Shackleton, M. (2002). The binomial Black Scholes model and the Greeks. Journal of Futures Markets, 22(2), 143-153.
8. Cox, J. C., Ross, S. A., Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. Journal of Financial Economics, 7(3), 29-263.
9. Duan, J. C. (1995). The GARCH option pricing model. Mathematical Finance, 5, 13-32.
10. Duan, J. C., Gauthier, G., Simonato, J. G., & Sasseville, C. (2003). Approximation American option prices in the GARCH framework. Journal of Futures Market, 23(10), 915-929.
11. Duan, J. C., & Simonato, J. G. (1998). Empirical Martingale simulation for asset prices. Management Science, 44(9), 1218-1233.
12. Duan, J. C., & Simonato, J. G. (2001). American option pricing under GARCH by A Markov chain approximation. Journal of Economic Dynamics and Control, 25(11), 1689-1718.
13. Duan, J. C., & Zhang, H. (2001). Pricing Hang Seng index options around the Asian financial crisis- A GARCH approach. Journal of Banking and Finance, 25(11), 1989-2014.
14. Dumas, B., Fleming, J., & Whaley, R. F. (1998). Implied volatility functions: Empirical tests. Journal of Finance, 53, 2059-2106.
15. Engle, R., & Ng, V. (1993). Measuring and testing of the impact of news on volatility. Journal of Finance, 48, 1749-1778.
16. Figlewski, S., & Gao, B. (1999). The adaptive mesh model: a new approach to efficient option pricing. Journal of Financial Economics, 53, 313-351.
17. Heston, S., & Nandi, S. (2000). A closed-form GARCH option pricing model. The Review of Financial Studies, 13, 586-625.
18. Hsieh, K. C., & Ritchken, P. (2000). An empirical comparison of GARCH option pricing models. Working paper.
19. Hanke, M. (1997). Neural network approximation of option pricing formulas for analytically intractable option pricing models. Journal of Computational Intelligence in Finance, 5, 20-27.

20. Lin, B. H., Wu, T. H., & Jian, C. A. (2004). Optimal pricing with discontinuous jumps & GARCH effects. 第一屆財務金融及財金未來學術實務研討會論文集, 324-352.
21. Lyuu, Y. D., & Wu, C. N. (2003). Complexity of the Ritchken- Trevor- Cakici- Topyan GARCH option pricing algorithm. Proceedings of IASTED International Conference on Financial Engineering & Applications.
22. Ritchken, P., & Trevor, R. (1999). Pricing options under generalized GARCH & stochastic volatility process. Journal of Finance, 54, 337-402.

2006 年 01 月 18 日收稿

2006 年 04 月 28 日初審

2006 年 12 月 31 日複審

2007 年 01 月 26 日接受