易腐性商品在階層市場下之敏感度分析

SENSITIVITY ANALYSIS OF PERISHABLE COMMODITY UNDER MULTI-MARKET

黃允成
屏東科技大學工業管理系教授
楊相賢
屏東科技大學工業管理系碩士班

Yun-Cheng Huang
Department of Industrial Management Professor
National Pingtung University of Science and Technology

Hsiang-Hsien Yang
Department of Industrial Management
National Pingtung University of Science and Technology

摘　要

本文探討易腐性商品在有效期限內階層市場定價下求解總期望利潤最大化之最適訂購策略，且對其相關參數進行敏感度分析；針對階層式市場需求建構一階層式市場需求對易腐性商品最適訂購量之數學規劃模型，以零售商為研究之對象，並將各階層市場之需求平均數、標準差及各階層市場之邊際利潤進行敏感度分析，以瞭解相關參數對總期望利潤之影響，進而求解最適訂購量；本模型亦具備未來市場需求之擴充性，可以擴充延伸至 n **階層之市場需求之結構；利用** Leibniz’s rule **推導出在某種限制條件下，** $T\pi(Q)$ **為嚴格凹函數**（strict concave function）**，並以數值分析模擬演算法求解最適訂購量** Q^* **，且印證本模式為凹函數有極大值存在，利用數值範例分析來進一步探討敏感度分析對最適訂購量與總期望利潤之變動關係，以滿足一般易腐性商品最適訂購量之決策需求。**

關鍵詞：易腐性商品，最適訂購策略，多階層市場需求，敏感度分析

ABSTRACT

This paper focus on multi-market market demand that follows normal distribution, and construct the mathematical models for retailers' perishable commodity optimal ordering strategy. Not only compare the perishables commodity with four stages market given price to find out the expected total profit within expiry date, but also this model can also extend to n stages market demand structure in the future and using Leibniz's rule to judge the existence of the maximum expected profit. Using a numerical example to demonstrate how the parameters affect the optimal ordering strategy. Finally, five conclusions are drawn for future studies and applications.

Keywords: perishable commodity, optimal ordering strategy, multi-market demand, sensitivity analysis

壹、緒論

由於生活水準的提升，在日常生活中營養乳品、新鮮的魚肉等成為營養補給的主要來源，所以，人們對於具短時效性產品的品質新鮮度要求愈來愈高，在以顧客導向的競爭市場中，從零售商的角度而言，對販售具時效性商品的訂購數量與定價是一個很重要的課題，因為若未能在有效期限內售出，過了有效期限後便需以殘值或視為呆廢料處理，其中，以傳統市場上販售魚貨之小販為最典型的例子，小販將買進來的魚貨由於對魚貨新鮮品質的要求，必須在當天內將買進之魚貨賣出，如果在早上的市場沒賣完，剩下來的魚貨就留用到中午再販售，而中午若沒有賣完，再留用到黃昏市場再行銷售，過了黃昏市場的銷售機會後，則必須將所有剩餘之存貨以呆廢料處理方式賣給下游顧客，作為食品加工或飼料之用。此類商品具有隨時間增加而價值銳減之特性，具有此類特性之商品稱為易腐性商品（perishable goods）或時效性（流行性）商品，此種商品的處理方式一般都採用報童模式（newsboy problem）處理；在實務上，易腐性商品之訂購量的決策實屬不易，因為訂購太多無法全數售完，造成過多的呆廢料與處理成本；訂購不足，無法滿足客戶需求，造成客戶的抱怨甚至商譽的損失。在商品管理上易腐性商品也異於一般性商品，因此，易腐性商品之訂購量，在實務上是一個重要的課題，攸關商家之利潤；此外，易腐性商品之存貨決策分析研究，有其重

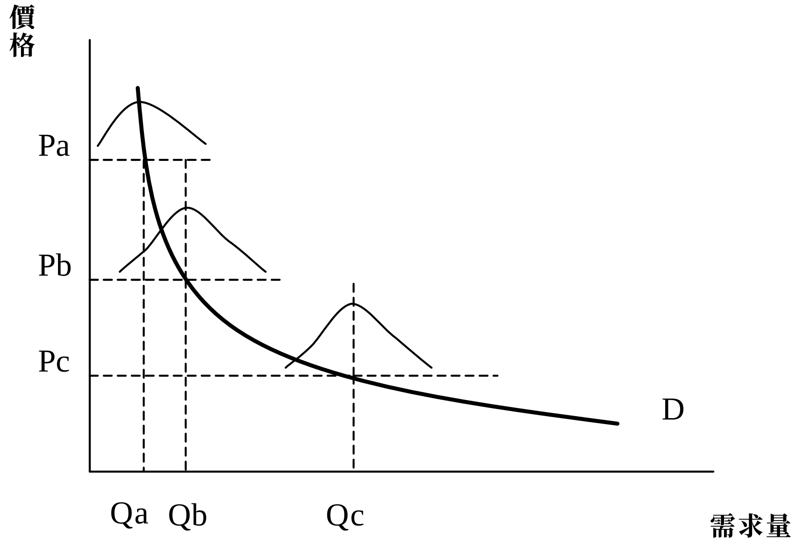

圖 1　需求法則示意圖

要地位，此乃易腐性商品之有效期限短，價值隨時間而銳減且需求不確定，如何在各個不同的限制條件與資源限制下，經由最佳化決策分析，找到滿足目標（利潤最大化或成本最小化）之最適解，是學術界所關心之課題。然而在實務上，易腐性商品在有效的期限內，並非售價皆相同，而是必須考量經濟學上需求法則（如圖 1 所示），亦即在其他條件不變時，對應於某一個價格，會有一個需求分配與之對應，且需求為一隨機變數，所以本研究針對易腐性商品在單一有效期限內需求為隨機變數，在階層市場定價下求解最適訂購量下使得總期望利潤極大化及相關參數之變動對總期望利潤之影響為本研究目的。

貳、文獻探討

本研究所蒐集有關易腐性商品相關文獻大致上分為三類，其一為製造商與零售商之間決策主體與資訊交流影響利潤模式之研究，其二為階段性定價下進貨具數量折扣之最適訂購量與再訂購策略之研究，第三類為易腐性商品在需求不確定下之存貨整合相關模式之研究，以上三類茲分述如下：

一、製造商與零售商之間決策主體與資訊交流影響利潤模式之研究

Lau, Lau, and Willett（2000），研究季節性商品在需求不確定且有退貨政策下，發展出一個演算模式，探討「價值」與「顧客到達」為需求不確定之主要因素，製造商與零售商在此狀況下如何設定所需之參數使得利潤最大。探討市場資訊不對稱的二階層流行性商品之存貨模式 Lau and Lau（2001），揭露出在產銷系統中，零售商位於較優勢之地位，因其掌握零售市場之訊息。在此狀況下，提出間斷和連續需求之決策模式，供製造商作為在資訊不對稱下，決策（定價…等）時之參考，以提升系統之效益。探討在製造商與零售商之間，降低需求不確定性之單期產品。Lau and Lau（2002），以給定批發價格、零售價格和不接受零售商的退貨為基礎，分別以常態分配、均勻分配和 Beta 分配估計期望利潤。探討單期商品在二階層多零售商分配系統之最佳變化基準的比較。Lau and Lau（2003），在一個系統中，單一製造廠多個零售通路的最佳決策和結果之比較。其研究分為製造商與所有的零售通路整合為單一決策主體，和製造與銷售分離的多決策主體，且製造商對不同之零售通路有不同的價格策略。Lou and Kogan（2003），提出多階段報童問題之動態模式，在動態且連續時間之單期報童問題做一歸納，指出連續時間的處理可以降低一些不連續時間所產生的問題，在此基礎上，利用 polynormial-time 組合演算法，當系統滿足某種能力狀態時，求解整體最佳解。

二、階段性訂價下進貨具數量折扣之最適訂購量與再訂購策略之研究

探討具固定壽命之易腐性商品最適訂購水準與訂購政策之評論，且假設訂購前置時間為正值狀況下；該研究在分析其產品退化率後，發展出以過期成本和總期望成本之啟發式（R，T）模式，其總期望成本項目包括存貨持有成本、訂購成本、缺貨成本與產品過期後之處理成本等，經由有產品過期限至與無過期限制之條件進行測試評估，利用模擬之方式以經驗法則區分模擬之結果，再經電腦運算後顯示，該模式與近似解之結果一致，最後於文中亦提出啟發式模式與產品無過期限制之比較結果。黃允成（2001），提出易腐性商品在兩階段定價下具進貨折扣，求解最適訂購量，總期望利潤最大化為目標，利用電腦化數值分析方法，在具進貨折扣和不具進貨折扣下求得最適訂購量與定價之比較。Khouja（1999），針對報童模式作一系列文獻回顧，並探討報童模式在很多的擴展已經在過去十年被提議；這些擴展包括經營策略在不同的目標和實用功能、不同的供應者訂價政策、不同的報紙經銷人定價政策和折扣訂定之策略等，並提出後續研究之建議。Khouja（2000），擴充傳統之報童問題需求是相依於售價且利用多段價格折扣來銷售超額的存貨。在固定折扣成本下給定實際需求和訂購量，發展出二個演算法，求解最佳數量折扣，且分析在實際需求發生前，即算出最佳

訂購量用以作為訂購之參考；本研究與該文之差異在於其需求為線性函數，而本文為非線性函數，在求解時本文需經由數值模擬演算法方能求得近似解，且該文之決策變數為初始價格與訂購數量，而本文之決策變數只有訂購數量。Lau, Lau, and Lau（1998），考慮在有效期間內兩階段訂購模式，利用電腦軟體求解最初之訂購（或生產）量，作為第二次訂購單開出之依據，該模式亦考慮第二次訂購之訂購成本，套用一個在不同產品組合條件下，如第二次訂購之交期和價格等，數值化例題之應用。Lau and Lau（1997），探討報童型態產品之再訂購策略，分析在給定二次訂購前置時間，且在有效期間二次訂購之期望總利潤之變化，分別以常態需求分配與 Beta 需求分配來估計總期望利潤。黃允成（1996），探討隨機性 需求且服從常態分配在具進貨折扣且允許缺貨下之最適再訂購點與安全存量，求解總期望成本最低，利用多變數最佳化理論與數值分析方法求解。

三、易腐性商品在需求不確定下之存貨整合相關模式之研究

Khouja, Mehrez, and Rabinowitz（1996），針對報童模式求解最適訂購量問題，推導出二項目報童問題的可替代性（two-item newsboy problem with substitutability, TINPS）（訂定最適訂購量之上界和下界）並利用蒙地卡羅模擬法求得 TINPS 之最佳解，此項結論優於不考慮可替代性之解。傳統 EOQ 模型中 Khouja and Park（2003），成本項目在規劃期內不會改變，因此無法反映通貨膨脹或是價格的增加或減少對最適訂購量之影響。所以作者將價格隨時間遞減之因素加入考量，價格下降導致週期個數、訂購數量及週期時間的改變，進而影響總成本之增加，在產品單位價格連續下降之情況下提出一個存貨模式，求解最適週期個數、週期時間及最適訂購數量。作者指出，規劃週期長度短之總成本最小化的表現會優於規劃週期長之總成本。Abad（2000），易腐性商品在有限產量、部分訂貨和缺貨不補的條件下之最佳訂購批量，其易腐性商品以指數比率退化，以零售商的角度來探討最小存貨持有成本為目標。George（2000），提出有別於傳統報童模式之機率性最佳化模式，針對需求不確定情況下提出間斷需求與區間需求二種類型之需求方案，在區間需求方案中，僅求解該區間每一產品之需求上限與下限，並利用線性時間演算法求解；在間斷需求方案中，給定每一產品近似需求之值，代入間斷需求方案求得最適解，並發展幾個針對多產品有預算限制之最大遺憾中取最小值演算邏輯求解，並指出間斷型需求方案為指數型困難問題（NP-Hard）可以利用動態規劃求解。提出易腐性商品在允許缺貨後補的情況下之存貨整合模式，考量市場策略對系統收益的影響，包括定價、廣告和缺貨後補之決策。其模式假設易腐性商品有一短的存貨週期，以 EPQ 和缺貨後補（訂貨）之水準為生產之準則，來求解系統之最大淨利，最後以數值化的例子來印證該模式；Nose and Ishii（1996），在倉儲容量限制下之易腐性商品於二種類型客戶（高優先和低優先）和

不同售價之存貨控制。不同的商品壽命反映在不同的售價上，且考慮倉庫的量限制。模式假設，需求在連續的期間為非負且已知分配之獨立隨機變數，在此期間二種類型的客戶相互獨立，其存貨首要考慮高優先客戶之需求，而低優先之顧客則以先進先出之配發政策，其模式成本項目包括短缺成本、採購成本、存貨持有成本和產品過時之成本等，經運算求解最大期望利潤；Adachi, Nose, and Kuriyama （1999），提出易腐性商品在受限於不同售價（已知且為固定）下之最佳存貨控制政策，其考慮在隨機需求下，不同生命週期（只分為三期）有不同售價，建構馬可夫決策過程，求解每一期間之期望平均利潤最大化下之最佳存貨控制政策。本研究與該文不同點在於本文將易腐性商品有效期限內分為四個階層，透過數值模擬演算法求解最適訂購量。此外，Lau and Lau（1996）提出，在產能限制下，多產品之單期存貨問題，提出二個案例其一為單一資源產能限制，其二為多資源限制，在單一資源產能受限的問題中，需要擴大典型的 Hadley-Whitin 之結果，用來管理一般之需求分配，在多資源限制的問題中，提出解決問題的程序，可以有效管理一般的問題。

由上述之文獻探討可以看出，易腐性商品之研究並無針對多階層市場定價下求解最適訂購量之研究，所以，本研究以傳統報童模式為起始，在商品的有效期限內，階層式劃分為四個市場，求解最適訂購量，以符合實務上之需求。

參、數學模式推導

一、傳統報童模式之公式推導

符號定義：

P_1 = 有效期限內第一階層市場之單位售價

P_2 = 有效期限內第二階層市場之單位售價

P_3 = 有效期限內第三階層市場之單位售價

P_{out} = 超過有效期限後之單位售價

C_0 = 單位進貨成本

X = 有效期限內之需求量（為一隨機變數）

μ_x = 有效期限內之平均需求量

σ_x = 有效期限內需求量之標準差

$f(X) = X$ 之機率密度函數（pdf）

X_1 = 第一階層市場之需求量（為隨機變數）

$\mu_1 = X_1$ 之平均數

$\sigma_1 = X_1$ 之標準差

X_2 = 第二階層市場之需求量（為隨機變數）

$\mu_2 = X_2$ 之平均數

$\sigma_2 = X_2$ 之標準差

X_3 = 第三階層市場之需求量（為隨機變數）

$\mu_3 = X_3$ 之平均數

$\sigma_3 = X_3$ 之標準差

$f(X_1) = X_1$ 之機率密度函數

$f(X_2) = X_2$ 之機率密度函數

$f(X_3) = X_3$ 之機率密度函數

MP_1 = 第一階層市場之邊際利潤 $(MP_1 > 0)$

MP_2 = 第二階層市場之邊際利潤

MP_3 = 第三階層市場之邊際利潤（MP_3 可為正，可為負）

MP_{out} = 最後階層市場之邊際利潤（$MP_{out} < 0$）

Q = 易腐性商品之訂購量

$T\pi(Q \mid P_1, P_2, P_3, P_{out})$ = 給定售價下購量為 Q 之總期望利潤

由以上之定義可知：

$MP_1 = P_1 - C_0$

$MP_2 = P_2 - C_0$

$MP_3 = P_3 - C_0$

$MP_{out} = P_{out} - C_0$

$P_1 \geq P_2 \geq P_3 \geq P_{out}$

傳統報童模式總期望利潤可以分成兩方面來討論：

(一) **當** $0 < X < Q$ **時，此情況表示有部分之商品無法於有效期限內售出，售出的部分為** X **單位，而在有效期限內剩餘** $(Q - X)$ **單位，將剩餘的** $(Q - X)$ **單位於第二階段以較低之售價，全部銷售出去，所以在** $0 < X < Q$ **的情況下，其總利潤為：** $X \cdot MP_1 + (Q - P) \cdot MP_{out}$ 。

(二) **當** $X \geq Q$ **時，此情況表示需求量大於或等於訂購量，因此所訂購之易腐性商品皆能於有效前間內全部銷售出去，故其總利潤如：** $Q \cdot MP_1$ 。

綜合上述，可建構總期望利潤最大化模式如下：

$$T\pi(Q) = \int_0^Q \left[X \cdot MP_1 + (Q - X) \cdot MP_{out}\right] f(X) dX + \int_Q^\infty Q \cdot MP_1 f(X) dX \qquad (1)$$

利用微積分的一階條件，並令其一階導數為零，求總期望利潤最大下之最適訂購量，如下所示：

$$\frac{d}{dQ} T\pi(Q) = \int_0^Q MP_{out} f(X) dX + \int_Q^\infty MP_1 f(X) dX = 0$$

$$F(Q) = \frac{MP_1}{MP_1 - MP_{out}} \ (\text{其中} MP_{out} < 0) \qquad (2)$$

利用此式可求得傳統報童模式最適訂購量。

二、四階層市場定價下之總利潤模式推導

有關四階層市場定價下之總利潤可分為三個部分加以討論：

(一) **當** $0 \leq X_1 \leq Q$ **時，僅銷售** X_1 **單位，剩餘** $(Q - X_1)$ **單位到第二階層市場銷售；當** $X_1 \geq Q$ **時，表示** Q **在第一階層市場全部銷售完畢。**

(二) **當** $0 \leq X_2 \leq (Q - X_1)$ **時，僅銷售** X_2 **單位，尚餘** $(Q - X_1 - X_2)$ **單位到第三階層市場銷售；當** $X_2 \geq (Q - X_1)$ **時，表示** $(Q - X_1)$ **在第二階層市場全部銷售完畢。**

(三) 當 $0 \le X_3 \le (Q - X_1 - X_2)$時，僅銷售 X_3單位，尚餘$(Q - X_1 - X_2 - X_3)$單位到第四階層市場再銷售，假設最後剩餘$(Q - X_1 - X_2 - X_3)$單位皆能夠在第四階層市場以殘值處理之方式全部銷售完畢。

根據以上之分析，可建構總期望利潤之數學模式於後：

$$
\begin{aligned}
T\pi(Q) = {} & \int_0^Q \left\{ X_1 \cdot MP_1 + \int_0^{Q-X_1} \left[X_2 \cdot MP_2 + \int_0^{Q-X_1-X_2} \left[X_3 \cdot MP_3 + (Q - X_1 - X_2 - X_3) MP_{out} \right] f(X_3) dX_3 \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_{Q-X_1-X_2}^{\infty} (Q - X_1 - X_2) MP_3 f(X_3) dX_3 \right] f(X_2) dX_2 + \int_{Q-X_1}^{\infty} (Q - X_1) MP_2 f(X_2) dX_2 \right\} f(X_1) dX_1 \\
& + \int_Q^{\infty} Q \cdot MP_1 f(X_1) dX_1
\end{aligned} \tag{3}
$$

由上述模式建構之邏輯，可以擴張推導出在 n 階層市場定價下之總利潤模型之通式如下：

$$
\begin{aligned}
T\pi(Q) = {} & \int_0^Q \left\{ X_1 MP_1 + \int_0^{Q-X_1} \left[X_2 MP_2 + \ldots.. + \int_0^{Q-\sum_{i=1}^{n-2} X_i} \left[X_{n-1} MP_{n-1} + (Q - \sum_{i=1}^{n-1} X_i) MP_{out} \right] f(X_{n-1}) dX_{n-1} + \right. \right. \\
& \left. \left. \ldots.. + \int_{Q-X_1-X_2}^{\infty} (Q - X_1 - X_2) MP_3 f(X_3) dX_3 \right] f(X_2) dX_2 + \int_{Q-X_1}^{\infty} (Q - X_1) MP_2 f(X_2) dX_2 \right\} f(X_1) dX_1 \\
& + \int_Q^{\infty} Q \cdot MP_1 f(X_1) dX_1
\end{aligned} \tag{4}
$$

$i = 1,2,3 \ldots n-1, out$

針對四階層定價下之總利潤模式求解最佳訂購量 Q^*，使得 $T\pi$ 有最大值，由於 Q 為決策變數，因此對 $T\pi(Q)$ 之 Q 求偏微分並令其為零，即：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T\pi(Q)}{\partial Q} = {} & \int_0^Q \left\{ \int_0^{Q-X_1} \left[\int_0^{Q-X_1-X_2} (MP_{out}) f(X_3) dX_3 + \int_{Q-X_1-X_2}^{\infty} (MP_3) f(X_3) dX_3 \right] f(X_2) dX_2 \right. \\
& \left. + \int_{Q-X_1}^{\infty} (MP_2) f(X_2) dX_2 \right\} f(X_1) dX_1 + \int_Q^{\infty} (MP_1) f(X_1) dX_1 = 0
\end{aligned} \tag{5}
$$

公式(5)經化簡後可得：

$$F_1(Q)=\frac{1}{MP_1}\left\{\begin{array}{l}MP_{out}\int_0^Q\int_0^{Q-X_1}\int_0^{Q-X_1-X_2}f(X_3)dX_3f(X_2)dX_2f(X_1)dX_1+\\MP_3\int_0^Q\int_0^{Q-X_1}\int_{Q-X_1-X_2}^{\infty}f(X_3)dX_3f(X_2)dX_2f(X_1)dX_1+\\MP_2\int_0^Q\int_{Q-X_1}^{\infty}f(X_2)dX_2f(X_1)dX_1+MP_1\end{array}\right\} \tag{6}$$

由公式(6)可看出，等號兩側皆有決策變數，因此在求解上必須以數值分析方法，才能求出 Q^* 之值。

訂購量之限制條件如下所示：

St.

$$MinX_1\le Q\le Max\{X_1+X_2+X_3\} \tag{7}$$

由於易腐性商品其實用價值會隨著時間的增加而遞減之特性，所以零售商在訂購商品時必定有所依據，由過去之銷售量的歷史資料，作為訂購量之參考，一般而言，以第一階層市場之最低需求量為最小訂購量，因為在此階段之邊際利潤最高，要滿足該階段之需求方能使利潤提升；訂購量之上限為前三個階層市場定價下需求總和，若訂購量高於前三個階層市場定價下需求總和，則剩餘之部分將以殘值方式處理，進而影響收益；且在給定 P_i 價格下，零售商願意且能夠購買的數量，因此，依據上述條件建構公式(7)為本模式之限制式。

為瞭解總利潤函數之凹凸性，本研究進一步做二階導數之推導，利用 Leibniz’ s rule 推導其結果如下所示：(過程見附錄 A)

$$\frac{d^2T\pi(Q)}{dQ^2}=\{(MP_{out}-MP_3)f(Q-X_1-X_2)f(Q-X_1)-MP_2f(Q-X_1)\}f(Q)$$
$$-MP_1f(Q) \tag{8}$$

令公式(8)小於零，則

$$\frac{d^2T\pi(Q)}{dQ^2}=\{(MP_{out}-MP_3)f(Q-X_1-X_2)f(Q-X_1)-MP_2f(Q-X_1)\}f(Q)$$
$$-MP_1f(Q)<0$$

經移向化簡後得：

$$(MP_{out} - MP_3) f(Q - X_1 - X_2) < \frac{MP_1 + MP_2 f(Q - X_1)}{f(Q - X_1)} \tag{9}$$

由公式(9)知道，總利潤函數在符合公式(9)之不等式的條件下為一嚴格凹函數（strict concave function）有極大值存在。

三、參數敏感度分析

由邊際利潤定義可得：

$MP_1 = P_1 - C_0$

$MP_2 = P_2 - C_0$

$MP_3 = P_3 - C_0$

$MP_{out} = P_{out} - C_0$

且 $P_1 \geq P_2 \geq P_3 \geq P_{out}$

由以上之定義可知，邊際利潤是由售價減去進貨成本而得，則針對公式(3)各相關參數進行敏感度分析以進一步瞭解相關參數對總期望利潤之影響：

(一) MP_1 對 $T\pi$ 之影響

為瞭解第一階層市場邊際利潤對總期望報酬之影響，針對 $T\pi$ 之 MP_1 求一階導數結果如公式(10)所示：

$$\frac{\partial T\pi(Q)}{\partial MP_1} = \int_0^Q f(X_1) dX_1 + \int_Q^\infty Q \cdot f(X_1) dX_1 > 0 \tag{10}$$

由公式(10)可知， MP_1 與 $T\pi$ 成正比之關係，即 MP_1 增加 $T\pi$ 亦隨之增加，而由邊際利潤之定義可知， MP_1 是由 $P_1 - C_0$ 所組成，因此，當 P_1 增加或 C_0 下降皆會造成 MP_1 的增加，所以連動使得 $T\pi$ 亦隨之增加。在其他條件不變下，此一結果與理性之推論相符，表示第一階層市場之邊際利潤增加，期望總利潤亦隨之上升。

(二) MP_2 對 $T\pi$ 之影響

為瞭解第二階層市場邊際利潤對總期望報酬之影響，針對 $T\pi$ 之 MP_2 求一階導數結果如下所示：

$$\frac{\partial T\pi(Q)}{\partial MP_2}=\int_0^Q\left[\int_0^{Q-X_1}X_2f(X_2)dX_2+(Q-X_1)\int_{Q-X_1}^{\infty}f(X_2)dX_2\right]f(X_1)dX_1>0 \tag{11}$$

由公式(11)可知，當 MP_2 增加時，總利潤 $T\pi$ 亦隨之增加，兩者呈現同向變動關係，且已知 MP_2 由所組成 P_2-C_0，當整個市場需求增加連動造成價格 P_2 的上升，或是由於企業經營效率（如：議價能力、大量採購或是良好的存貨控制等因素）提升導致進貨成本的下降，皆會使得 MP_2 增加，因而帶動總期望利潤增加，因此，MP_2 的增加對 $T\pi$ 有正面之貢獻。經由上述之分析結論所示，同理，本研究將對第三階層市場及第四階層市場之邊際利潤作相同之分析如下公式所示：

$$\frac{\partial T\pi(Q)}{\partial MP_3}= \int_0^Q\left\{\int_0^{Q-X_1}\left[\int_0^{Q-X_1-X_2}X_3\cdot f(X_3)dX_3+\int_{Q-X_1-X_2}^{\infty}(Q-X_1-X_2)f(X_3)dX_3\right]f(X_2)dX_2\right\}f(X_1)dX_1>0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial T\pi(Q)}{\partial MP_{out}}= \int_0^Q\left\{\int_0^Q\left[\int_0^{Q-X_1X_2}(Q-X_1X_2-X_3)f(X_3)dX_3\right]f(X_2)dX_2\right\}f(X_1)dX_1>0 \tag{13}$$

綜合以上之公式(10)、(11)、(12)及(13)可以發現，各階層市場之邊際利潤 $(MP_i=P_i-C_0, i=1,2,3,out)$ 增加，在其他條件不變下，總期望利潤 $T\pi$ 亦隨之增加，彼此間呈同向之變動關係，但依經濟學上產品之價量關係可知，售價提高會有抑制銷售量之效果，因此其他條件會受其影響而無法保持不變，導致總期望利潤是否會如預期有增加的情況，必須要加入其他因素之考量，如需求彈性增加等。另一方面，因為只要零售商之經營績效提升，及其他條件配合之下，在進貨成本項目方面是可以合理的降低，所以，使得總期望利潤值有增加之趨勢。

(三) μ_1,μ_2,μ_3 對總期望利潤 $T\pi$ 之影響

為瞭解各階層市場平均需求量變動對總利潤之影響，必須要假設其各階層市場之變異數均相同，且不會隨之變動，除此之外，還必須確定各階層市場之需求為何種分配後方能作進一步之分析，若各階層市場需求服從常態分配，在此假設前提下，乃將 $T\pi$ 對 μ_1 求偏微分如下所示：

$$\frac{\partial T\pi(Q)}{\partial\mu_1}=$$

$$\int_0^Q\left\{X_1\cdot MP_1+\int_0^{Q-X_1}\left[X_2\cdot MP_2+\int_0^{Q-X_1-X_2}[X_3\cdot MP_3+(Q-X_1-X_2-X_3)MP_{out}]\right.\right.$$
$$\left.f(X_3)dX_3+\int_{Q-X_1-X_2}^{\infty}(Q-X_1-X_2)MP_3f(X_3)dX_3\right]f(X_2)dX_2+$$
$$\left.\int_{Q-X_1}^{\infty}(Q-X_1)MP_2f(X_2)dX_2\right\}\frac{\partial f(X_1)}{\partial\mu_1}dX_1+\int_Q^{\infty}Q\cdot MP_1\frac{\partial f(X_1)}{\partial\mu_1}dX_1>0 \tag{14}$$

由公式(14)可知，當第一階層市場需求服從常態分配且平均數為μ_1變異數為σ_1^2時，μ_1增加則總期望利潤亦隨之增加兩者呈正向比例增加，如圖 2 所示，即圖中以μ_1為平均數，給定Q之訂購量，需求增加其平均數μ_1向右平移至μ_1'，則原本以μ_1為平均數之曲線下斜線部分之面積（即圖中 c 的部分），小於以μ_1'為平均數曲線下之面積（即圖中 d 的部分），又圖中 a 與 b 為無法售出之面積且 a 大於 b，因此，以期望利潤而言，平均數增加則總期望利潤隨之增加，但此結果需在邊際利潤為正值$(MP_i>0)$且Q不變之情況下，否則兩者呈負向變動關係，簡言之，若設法提升第一階段之平均需求，將有助於總期望利潤之增加。同理，在第二和第三階層市場之平均需求增加亦使得總期望利潤上升，茲將其總利潤函數對平均數之偏微分其結果列於後，如公式(15)和公式(6)所示：

$$\frac{\partial T\pi(Q)}{\partial\mu_2}=$$

$$\int_0^Q\left\{X_1\cdot MP_1+\int_0^{Q-X_1}\left[X_2\cdot MP_2+\int_0^{Q-X_1-X_2}[X_3\cdot MP_3+(Q-X_1-X_2-X_3)MP_{out}]\right.\right.$$
$$\left.f(X_3)dX_3+\int_{Q-X_1-X_2}^{\infty}(Q-X_1-X_2)MP_3f(X_3)dX_3\right]\frac{(X_2-\mu_2)}{\sigma_2^2}f(X_2)dX_2+$$
$$\left.\int_{Q-X_1}^{\infty}(Q-X_1)MP_2\frac{(X_2-\mu_2)}{\sigma_2^2}f(X_2)dX_2\right\}f(X_1)dX_1+\int_Q^{\infty}Q\cdot MP_1f(X_1)dX_1 \tag{15}$$

$$\frac{\partial T\pi(Q)}{\partial\mu_3}=$$

$$\int_0^Q\left\{X_1\cdot MP_1+\int_0^{Q-X_1}\left[X_2\cdot MP_2+\int_0^{Q-X_1-X_2}[X_3\cdot MP_3+(Q-X_1-X_2-X_3)MP_{out}]\right.\right.$$
$$\left.\frac{(X_3-\mu_3)}{\sigma_3^2}f(X_3)dX_3+\int_{Q-X_1-X_2}^{\infty}(Q-X_1-X_2)MP_3\left[\frac{(X_3-\mu_3)}{\sigma_3^3}\right]f(X_3)dX_3\right]f(X_2)dX_2+$$
$$\left.\int_{Q-X_1}^{\infty}(Q-X_1)MP_2f(X_2)dX_2\right\}f(X_1)dX_1+\int_Q^{\infty}Q\cdot MP_1f(X_1)dX_1 \tag{16}$$

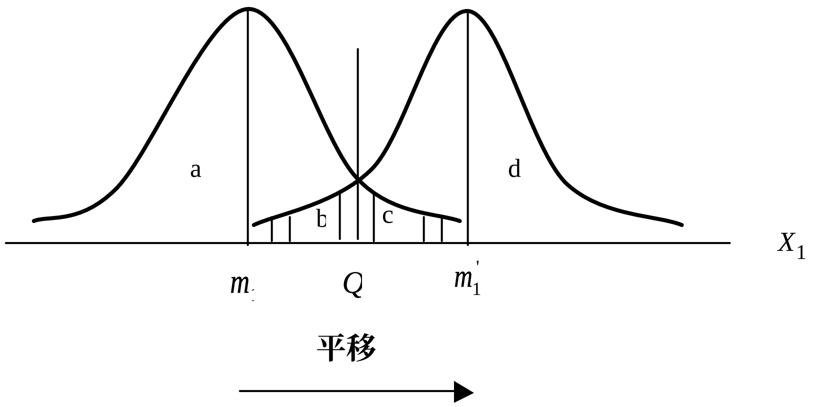

圖 2　不同市場平均需求變動示意圖

唯上述之結果必須在 $MP_i > 0, i = 1,2,3$ 成立之條件下，方能使平均數與總期望利潤成正向之關係。關於第四階層市場之需求本研究假設其給定 P_{out} 價格條件下，其需求彈性無窮大，故毋須對其進行敏感度分析。以上之敏感度分析，將於數值範例中驗證。

(四) σ_1,σ_2 和 σ_3 對 $T\pi$ 之影響

為瞭解第一階層市場標準差變動對總期望利潤之影響，進行對之偏微分得下列公式：

$$\frac{\partial T\pi(Q)}{\partial\sigma_1}= \int_0^Q \Bigg\{ X_1\cdot MP_1+\int_0^{Q-X_1}\Bigg[X_2\cdot MP_2+\int_0^{Q-X_1-X_2}[X_3\cdot MP_3+(Q-X_1-X_2-X_3)MP_{out}] f(X_3)dX_3+\int_{Q-X_1-X_2}^{\infty}(Q-X_1-X_2)MP_3 f(X_3)dX_3\Bigg] f(X_2)dX_2+ \int_{Q-X_1}^{\infty}(Q-X_1)MP_2 f(X_2)dX_2\Bigg\}\frac{\partial f(X_1)}{\partial\sigma_1}dX_1+\int_Q^{\infty}Q\cdot MP_1\frac{\partial f(X_1)}{\partial\sigma_1}dX_1 \tag{17}$$

其中， $f(X_1)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}exp(-\dfrac{(X_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2})$

$$\frac{\partial f(X_1)}{\partial\sigma_1}=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1{}^2}exp(-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma_1^2})+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}exp(-\frac{(X_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2})\frac{(X_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^3})$$

經化簡後如下所示：

$$\frac{\partial f(X_1)}{\partial\sigma_1}=\frac{f(X_1)}{\sigma_1}\left[\frac{(X_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-1\right] \tag{18}$$

其中， $\because\frac{(X_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}=Z_1^2,\therefore|Z_1|>1\Rightarrow f'(Z_1)>0,|Z_1|<1\Rightarrow f'(Z_1)<0$

所以在 $X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 下，σ_1增加使得總期望利潤亦增加之機率小於σ_1增加使得總期望利潤下降之機率，因此，由理性決策者之觀點推論當σ_1增加時，總期望利潤呈下滑之機率高，如圖 3 所示。同理，σ_2和σ_3之變動對總期望利潤之影響如公式(19)和公式(20)所示：

$$\frac{\partial f(X_2)}{\partial\sigma_2}=\frac{f(X_2)}{\sigma_2}\left[\frac{(X_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-1\right]=\frac{f(X_2)}{\sigma_2}(Z_2^2-1) \tag{19}$$

$$\frac{\partial f(X_3)}{\partial\sigma_3}=\frac{f(X_3)}{\sigma_3}\left[\frac{(X_3-\mu_3)^2}{\sigma_3^2}-1\right]=\frac{f(X_3)}{\sigma_3}(Z_3^2-1) \tag{20}$$

經上述分析，各階層市場需求之變異數增加，其總期望利潤下降之機率大於總期望利潤增加之機率，此一結果將於數值範例中加以驗證。

(五) 數值分析演算法之步驟

本研究將公式(3)轉換如下所示，以利數值分析方法，求解最大期望總利潤下之最適訂購批量：

$$\begin{aligned}T\pi\approx\lim_{\substack{\Delta X_1\to 0\\ \Delta X_2\to 0\\ \Delta X_3\to 0}}&\left\{\sum_{X_1=0}^{Q}\left\{X_1MP_1+\sum_{X_2=0}^{Q-X_1}\left[X_2MP_2+\sum_{X_3=0}^{Q-X_1-X_2}\left[X_3MP_3+(Q-X_1-X_2-X_3)MP_{out}\right]f(X_3)\Delta X_3\right.\right.\right.\\&\left.\left.+\sum_{X_3=Q-X_1-X_2}^{\infty}(Q-X_1-X_2)MP_3f(X_3)\Delta X_3\right]f(X_2)\Delta X_2+\sum_{X_2=Q-X_1}^{\infty}(Q-X_1)MP_2f(X_2)\Delta X_2\right\}f(X_1)\Delta X_1\\&\left.+\sum_{X_1=Q}^{\infty}Q\cdot MP_1f(X_1)\Delta X_1\right\}\end{aligned} \tag{21}$$

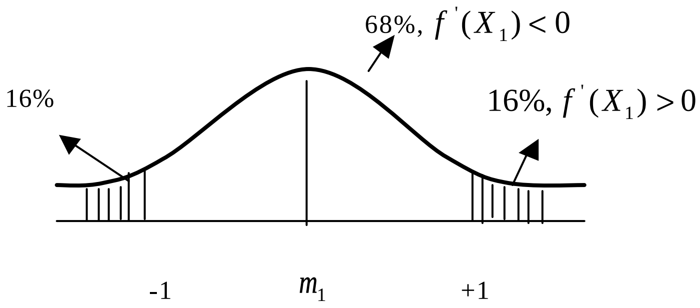

圖 3　σ_1變動對 $T\pi$ 之影響示意圖

$$Q^* = \underset{Q}{Arg} \quad Max\{T\pi \mid Q_{Min} \le Q \le Q_{Max}\} \tag{22}$$

針對公式(21)和公式(22)之數值分析演算法之求解邏輯步驟如下所示：

Step1：**宣告** $Ai(n), Bi(n)$ **之切割與資料型態**

設定起始參數值包括 $MP_1, MP_2, MP_3, MP_{out}, n, \pi, f(X_i), \mu_i, \sigma_i, i = 1,2,3$ **及** X_i **和** Q **之搜尋圍**

$MinX_1 \le Q \le Max\{X_1 + X_2 + X_3\}$

依公式(21)計算總期望利潤。

Step2：**結構化巢狀迴圈設計**

迴圈一：最適訂購量之搜尋範圍

迴圈二：第一階層市場 X_1 **之需求範圍**

計算 X_1 **之機率值和利潤值**

迴圈三：第二階層市場 X_2 **需求範圍**

計算 X_2 **之機率和利潤值**

迴圈四：第三階層市場 X_3 **需求範圍**

計算 X_3 **之機率和利潤值**

迴圈四結束

迴圈五：第三階層市場需求範圍
計算 X_3 之機率和利潤值
迴圈五結束

利潤值之加總
迴圈三結束

迴圈六：第二階層市場需求範圍
計算 X_3 之機率和利潤值
迴圈六結束

利潤值之加總
迴圈二結束

迴圈七：第一階層市場需求範圍
計算 X_1 之機率和利潤值
迴圈七結束

利潤值之加總
迴圈一結束

形成一結構化之巢狀迴圈。

Step3：保留 $T\pi$ 與 Q

Step4：比較總利潤值，取 $T\pi$ 最大值和其所對應之 Q 值。

Step5：顯示結果

顯示最佳訂購量 $T\pi$，顯示最大總期望利潤 Q^*。

肆、範例分析與結論

某二十四小時花店，其販賣一種高級花卉，其單位進貨成本為每公斤 30 元，新鮮花卉在凌晨進貨，進貨當天早上為第一階層市場，其售價為 100 元，由於新鮮花卉不耐久放，所以到隔天為第二階層市場售價下降，其售價為 70 元，第三天為第三階層市場售價為 50 元，再隔一天為第四階層市場，將所剩的高級花卉全數銷售給下游

廠商作為花卉加工或經乾燥處理之用，其售價為 10 元。依店長表示，據過去之歷史資料顯示各階層市場之需求量皆服從常態分配，第一階層市場需求 $N(60,12^2)$，第二階層市場需求 $N(40,8^2)$，第三階層市場需求 $N(30,6^2)$，試求解最適訂購量 Q^*，方能使總期望利潤 $T\pi^*$ 最大？

一、求解

依題意： $X_1 \sim N(60,12^2), X_2 \sim N(40,8^2), X_3 \sim N(30,6^2)$

$$MP_1 = P_1 - C_0 = 100 - 30 = 70$$

$$MP_2 = P_2 - C_0 = 70 - 30 = 40$$

$$MP_3 = P_3 - C_0 = 50 - 30 = 20$$

$$MP_{out} = P_{out} - C_0 = 10 - 30 = -20$$

單位：元 / 公斤

依公式(3)和公式(21)可知：

$$T\pi = \int_0^Q \left\{ X_1 \cdot MP_1 + \int_0^{Q-X_1} \left[X_2 \cdot MP_2 + \int_0^{Q-X_1-X_2} \left[X_3 \cdot MP_3 + (Q - X_1 - X_2 - X_3) MP_{out} \right] f(X_3) dX_3 \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_{Q-X_1-X_2}^{\infty} (Q - X_1 - X_2) MP_3 f(X_3) dX_3 \right] f(X_2) dX_2 + \int_{Q-X_1}^{\infty} (Q - X_1) MP_2 f(X_2) dX_2 \right\} f(X_1) dX_1$$
$$+ \int_Q^{\infty} Q \cdot MP_1 f(X_1) dX_1$$

$$T\pi \approx \lim_{\substack{\Delta X_1 \to 0 \\ \Delta X_2 \to 0 \\ \Delta X_3 \to 0}} \left\{ \sum_{X_1=0}^{Q} \left\{ X_1 MP_1 + \sum_{X_2=0}^{Q-X_1} \left[X_2 MP_2 + \sum_{X_3=0}^{Q-X_1-X_2} \left[X_3 MP_3 + (Q - X_1 - X_2 - X_3) MP_{out} \right] f(X_3) \Delta X_3 \right.\right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{X_3=Q-X_1-X_2}^{\infty} (Q - X_1 - X_2) MP_3 f(X_3) \Delta X_3 \right] f(X_2) \Delta X_2 + \sum_{X_2=Q-X_1}^{\infty} (Q - X_1) MP_2 f(X_2) \Delta X_2 \right\} f(X_1) \Delta X_1$$
$$\left. + \sum_{X_1=Q}^{\infty} Q \cdot MP_1 f(X_1) \Delta X_1 \right\}$$

其中： $f(X_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(X_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$；$f(X_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(X_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$；$f(X_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_3} e^{-\frac{(X_3-\mu_3)^2}{2\sigma_3^2}}$

$-\infty \le X_1 \le \infty$, $-\infty \le X_2 \le \infty$, $-\infty \le X_3 \le \infty$

表 1 不同訂購量下之總利潤分析表

$(\mu_1 = 60, \sigma_1 = 12, \mu_2 = 40, \sigma_2 = 8, \mu_3 = 30, \sigma_3 = 6)$

Q	121	122	123	124	125	126	127
Tp	6082.49	6090.92	6098.75	6106.75	6112.03	6116.80	6121.34
Q	128	129	130*	131	132	133	134
Tp	6123.40	6125.05	6126.16*	6125.01	6123.54	6121.34	6117.09
Q	135	136	137	138	139	140	141
Tp	6112.58	6107.25	6100.08	6092.72	6084.52	6074.70	6064.74

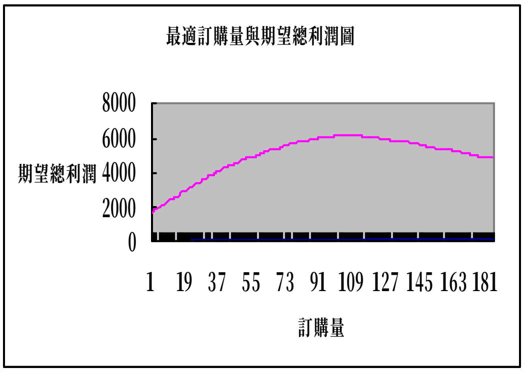

圖 4 最適訂購量圖示

因此，以公式(21)和公式(22)求解最適訂購量，設計以 Visual Basic 6.0 撰寫數值模擬分析演算之程式，在中央處理器為 Pentium-4 3.0GHz，記憶體為 512MB 之桌上型電腦，經過約 16 億次運算約費時約 15 小時，其結果如表 1 所示。

經電腦運算後，由表 1 可知最適訂購量為當 Q^* 為 130 時，$T\pi$ 是 6126.16 為最適解，由圖 4 可以看出，其訂購量增加總利潤值亦隨之增加，但過了最適訂購量 Q^* 時，Q 的增加反而造成總利潤下降，因此，可以由此判斷 $T\pi$ 為 Q 之凹函數（concave function）其最大值必然存在。

二、敏感度分析

為進一步瞭解參數變動狀況對總期望利潤與最適訂購量之影響，以下分別針對標

準差（σ_1,σ_2 和 σ_3）、平均數（μ_1,μ_2 和 μ_3）及邊際利潤（MP_1,MP_2,MP_3 和 MP_{out}）等不同參數變動進行分析如後所示：

(一) MP_1,MP_2,MP_3 和 MP_{out} 對 $T\pi$ 之影響

在本例中，為進一步探討各階層市場之邊際利潤大小變動情形對訂購量與總期望利潤之影響，故就各邊際利潤變大與變小來觀察其訂購量與總利潤之變化狀況，如表 2 所示。

由表 2 可知，總期望利潤皆隨著各階層市場需求之邊際利潤變大而增加，且隨著各階層市場需求之邊際利潤變小而下降，兩者呈正向變動之關係，此一趨勢與本模式之公式推導結果相符，在本例中，獲利市場為第一、二及三階層市場，所以，在獲利市場邊際利潤愈高（在其他條件不變下）且最適訂購量亦升高則為零售商所帶來之收益亦愈高，此與一般理性推論亦相符；在最適訂購量方面，第一和第二階層市場之最適訂購量變動不大，此乃因最適訂購量以滿足第一及第二階層市場之需求，且在 $MP_3>0,MP_{out}<0$ 條件下，MP_1 與 MP_2 之增加對最適訂購量無影響，但第三階層市場需求為關鍵市場，MP_3 變化對最適訂購量之影響較大，若過了第三階層市場之後其邊際利潤為負值或者由正轉為負值，則多訂無法增加總期望利潤；在第四階層市場若其邊際利潤為正值則多訂會增加其利潤，且本例中假設其需求無窮大，所以當 $MP_{out}>0$ 時，其 $Q^*,T\pi$ 會趨近無窮大。

(二) μ_1,μ_2 與 μ_3 之變動對 $T\pi$ 之影響

為瞭解各階層市場需求平均數變動對最適訂購量與總期望利潤之影響，在本例中其他參數不變，僅變動每一階層需求平均數，其參數設定和數值模擬結果如表 3 所示。

由表 3 可知，各階層市場之平均數提高，則總期望利潤亦隨之上升，反之亦然，在最適訂購量方面，從具體數字來看，當各階層市場之平均數上升 5 單位則最適訂購量亦上升 5 單位，而總期望利潤約略增加量為 $MP_i\times\Delta Q$，以第三階層市場而言，$\Delta T\pi=MP_3\times\Delta Q=20\times5=100$ 元，三者間之變動呈現穩定之變動關係，此一結果乃因第一、二和三階層市場之邊際利潤均為正值所致，同理，第一及第二階層市場需求之平均數變動亦有相同之結論，且與本研究推論相符。

(三) σ_1,σ_2 和 σ_3 對 $T\pi$ 之影響

為瞭解第一階層市場、第二階層市場和第三階層市場標準差變動對總期望利潤之影響，進行敏感度分析，其結果如表 4 所示。

表 2　各階層市場邊際利潤大小變動彙總比較表

$\sigma_1=12,\sigma_2=8,\sigma_3=6,\mu_1=60,\mu_2=40,\mu_3=30,MP_2=40,MP_3=20,MP_{out}=-20$				
MP_1 下降	70	65	60	55
Q^*	130	130	130	130
Tp	6126.16	5827.20	5828.24	5229.28
$\sigma_1=12,\sigma_2=8,\sigma_3=6,\mu_1=60,\mu_2=40,\mu_3=30,MP_2=40,MP_3=20,MP_{out}=-20$				
MP_1 上升	70	75	80	85
Q^*	130	130	130	130
Tp	6126.16	6425.13	6724.24	7023.05
$\sigma_1=12,\sigma_2=8,\sigma_3=6,\mu_1=60,\mu_2=40,\mu_3=30,MP_1=70,MP_3=20,MP_{out}=-20$				
MP_2 下降	40	35	30	25
Q^*	130	130	130	130
Tp	6126.16	5927.62	5729.08	5530.54
$\sigma_1=12,\sigma_2=8,\sigma_3=6,\mu_1=60,\mu_2=40,\mu_3=30,MP_1=70,MP_3=20,MP_{out}=-20$				
MP_2 上升	40	45	50	55
Q^*	130	130	130	130
Tp	6126.16	6324.71	6523.25	6721.79
$\sigma_1=12,\sigma_2=8,\sigma_3=6,\mu_1=60,\mu_2=40,\mu_3=30,MP_1=70,MP_2=40,MP_{out}=-20$				
MP_3 下降	20	15	10	5
Q^*	130	127	124	121
Tp	6126.16	6009.27	5899.64	5799.70
$\sigma_1=12,\sigma_2=8,\sigma_3=6,\mu_1=60,\mu_2=40,\mu_3=30,MP_1=70,MP_2=40,MP_{out}=-20$				
MP_3 上升	20	25	30	35
Q^*	130	132	133	136
Tp	6126.16	6247.60	6373.74	6502.42
$\sigma_1=12,\sigma_2=8,\sigma_3=6\mu_1=60,\mu_2=40,\mu_3=30,MP_1=70,MP_2=40,MP_3=20$				
MP_{out} 下降	-20	-25	-30	-35
Q^*	130	127	127	124
Tp	6126.16	6096.80	6072.26	6050.80
$\sigma_1=12,\sigma_2=8,\sigma_3=6\mu_1=60,\mu_2=40,\mu_3=30,MP_1=70,MP_2=40,MP_3=20$				
MP_{out} 上升	-20	-5	5	10
Q^*	130	142	∞	∞
Tp	6126.16	6265.88	∞	∞

表 3 各階層市場需求平均數變動對最適訂購量與總期望利潤之影響表

$\sigma_1 = 12, \sigma_2 = 8, \sigma_3 = 6, \mu_2 = 40, \mu_3 = 30, MP_1 = 70, MP_2 = 40, MP_3 = 20, MP_{out} = -20$				
μ_1 下降	60	55	50	45
Q^*	130	125	120	115
Tp	6126.16	5776.64	5427.11	5077.58
$\sigma_1 = 12, \sigma_2 = 8, \sigma_3 = 6, \mu_2 = 40, \mu_3 = 30, MP_1 = 70, MP_2 = 40, MP_3 = 20, MP_{out} = -20$				
μ_1 上升	60	65	70	75
Q^*	130	135	140	145
Tp	6126.16	6475.69	6825.22	7174.74
$\sigma_1 = 12, \sigma_2 = 8, \sigma_3 = 6, \mu_1 = 60, \mu_3 = 30, MP_1 = 70, MP_2 = 40, MP_3 = 20, MP_{out} = -20$				
μ_2 下降	40	35	30	25
Q^*	130	125	120	115
Tp	6126.16	5926.83	5227.40	5527.93
$\sigma_1 = 12, \sigma_2 = 8, \sigma_3 = 6, \mu_1 = 60, \mu_3 = 30, MP_1 = 70, MP_2 = 40, MP_3 = 20, MP_{out} = -20$				
μ_2 上升	40	45	50	55
Q^*	130	135	140	146
Tp	6126.16	6325.13	6524.01	6723.34
$\sigma_1 = 12, \sigma_2 = 8, \sigma_3 = 6, \mu_1 = 60, \mu_2 = 40, MP_1 = 70, MP_2 = 40, MP_3 = 20, MP_{out} = -20$				
μ_3 下降	30	25	20	15
Q^*	130	125	121	118
Tp	6126.16	6023.88	5919.36	5810.78
$\sigma_1 = 12, \sigma_2 = 8, \sigma_3 = 6, \mu_1 = 60, \mu_2 = 40, MP_1 = 70, MP_2 = 40, MP_3 = 20, MP_{out} = -20$				
μ_3 上升	30	35	40	45
Q^*	130	135	140	145
Tp	6126.16	6226.95	6327.39	6427.44

表 4　各階層在不同變異下之比較表

$\sigma_2=8,\sigma_3=6,\mu_1=60,\mu_2=40,\mu_3=30,MP_1=70,MP_2=40MP_3=20,MP_{out}=-20$				
σ_1	12	15	20	25
Q^*	130	131	132	132
Tp	6126.16	6082.26	5999.23	5900.17
$\sigma_1=12,\sigma_3=6,\mu_1=60,\mu_2=40,\mu_3=30,MP_1=70,MP_2=40,MP_3=20,MP_{out}=-20$				
σ_2	8	15	20	35
Q^*	130	131	131	136
Tp	6126.16	6044.59	5970.65	5704.46
$\sigma_1=12,\sigma_2=8,\mu_1=60,\mu_2=40,\mu_3=30,MP_1=70,MP_2=40,MP_3=20,MP_{out}=-20$				
σ_3	6	10	15	20
Q^*	130	130	130	130
Tp	6126.16	6095.28	6043.10	5981.74

由表 4 可知，第一階層市場總利潤值隨著σ_1增大其訂購量呈微幅上升之趨勢（第三階層市場除外），但其總利潤卻呈下降之趨勢，原因為離散程度變大為因應需求的波動採取增加訂購量之策略，最後造成多餘的訂購量流至次要階層市場，而使得總利潤下降；在其他條件不變下，σ愈大，其$T\pi$之變化在第一階層市場其利潤呈現下降，Q^*則微幅上升，第二與第三階層市場總期望利潤亦呈下降趨勢，當第二階層市場之最適訂購量對σ較敏感，當σ愈大之情境下，零售商願意訂購較多之商品販售，以符合需求波動，此一狀況與本模式推論相符。

伍、結論

本文針對階層式市場需求結構建構一四階層市場之非線性期望需求數學模型，求解四階層市場訂價下最適訂購量，可使總期望利潤最大化，並於模式中推導出各參數對總期望利潤之影響，由於模型為非線性之故，故求解最佳化過程中使用數值分析方法，以求得最適訂購批量，使得總期望利潤最大化；經本研究可獲致如下重要結論：

一、本研究將傳統之報童問題延伸擴大，並加入階層式之市場需求，在某些情況下較

符合經營實務，如本研究中所建構之模式，且在數值範例中亦符合現實之情境；建構四階層市場定價之數學模型，利用數值分析方法求解最適訂購量，使總期望利潤最大化，並利用 Leibniz's rule 推導出在公式(9)之不等式的條件下，$T\pi(Q)$為嚴格凹函數（strict concave function），且進一步將四階層市場模型延伸擴大為 n 階層市場之數學模型，供未來需求市場擴大之用。

二、於模式中利用敏感度分析以瞭解各階層市場之參數（$MP_1, MP_2, MP_3, MP_{out}, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \sigma_1, \sigma_2$和$\sigma_3$）對總期望利潤之影響，並於數值範例中獲得印證。

三、在各階層需求平均數之敏感度分析中可以看出，其平均數增加則總期望利潤亦呈上升之趨勢，兩者為正向變動之關係，此一結果可由公式(14)、(15)、(16)和表 3 獲得驗證。

四、於敏感度分析中發現風險愈高（σ_i愈大）則最適訂購量與總期望利潤愈小，反之亦有相同之趨勢，此可由公式(18)、(19)和公式(20)及表 4 得證，此與一般理性決策者之推論相符。

五、各階層市場邊際利潤增加在其他條件不變下，發現造成總期望利潤上升之趨勢，此一結論可由公式(10)、(11)、(12)、(13)和表 2 獲得驗證，亦與理性決策者期望之結果相符；在關鍵之第三階層市場中，發現在其他條件不變之下其邊際利潤增加則最適訂購量呈正向增加之趨勢，而第一、第二階層市場之邊際利潤增加，對最適訂購量之影響並不明顯（即Q^* 對MP_1及MP_2較不敏感），但第三階層市場邊際利潤，對最適訂購量有顯著之正向影響（即Q^*對MP_3較敏感）。

陸、參考文獻

一、中文部分：

1. 黃允成(1996)，「機率性需求存貨模式最佳訂購量及安全存量水準之研究」，交大管理學報，16(2), 19-36。

2. 黃允成(2001)，「報童模式在機率性需求與數量折扣下最適訂購量與定價策略之研究」，中國工業工程學刊，18(6), 43-52。

二、英文部分：

1. Adachi, Y., Nose, T., & Kuriyama, S. (1999). Optimal in inventory control policy subject to different selling prices of perishable commodities, International Journal Production Economics, 60-61, .389-394.

2. Abad, P. L. (2000). Optimal lot size for a perishable good under conditions of finite production and partial backordering and lost sale, Computer and Industrial Engineering, 38, 457-465.

3. George, L. V. (2000). Robust multi-item newsboy model with a budget constraint, The International Journal of Production Economics, 66 , 213-226.

4. Khouja, M., & Park, S. (2003). Optimal lot sizing under continuous price decrease, The International Journal of Management Science, 31, 539-545.

5. Khouja, M. J. (2000). Optimal ordering, discounting, and pricing in the single-period problem, International Journal Production Economics, 65, 201-216.

6. Khouja, M. (1999). The single-period (news-vendor) problem: literature review and suggestions for future research, The International Journal of Management Science, 27, 537-553.

7. Khouja, M., Mehrez, A., & Rabinowitz, G. (1996). A two-item newsboy problem with substitutability, The International Journal of Production Economics, 44, 276-275.

8. Lau, A. H., Lau, L., & Lau, H. S. (1998). Decision models for single-period products with two ordering opportunities, International Journal Production economics, 55, 57-70.

9. Lau, A. H. L., & Lau, H. S. (2001). Some two-echelon style-good inventory models with asymmetric market information, European Journal of Operation Research, 134, 29-42.

10. Lau, A. H. L., Lau, H. S., & Willett, K. D. (2000). Demand uncertainty and returns policies for a seasonal product: An alternative model, International Journal Production Economics, 66, 1-12.

11. Lau, A. H. L., & Lau, H. S. (2002). The effects of reducing demand uncertainty in a manufacturer-retailer channel for single-period products, Computer & Operation Research, 29, 1583-1602 .

12. Lau, A. H. L., & Lau, H. S. (2003). Comparative normative optimal behavior in two-echelon multiple-retailer distribution system for a single-period product, European Journal of Operation Research, 144, 659-676.

13. Lau, H. S., & Lau, A. H. L. (1996). The newsstand problem: A capacitated multiple-product single-period inventory problem, European Journal of Operation Research, 94, 29-42.

14. Lau, H. S., & Lau, A. H. L. (1997). Reordering strategies for a newsboy-type product, European Journal of Operation Research, 103, 557-572.

15. Lou, S., & Kogan, K. (2003). Multi-stage newsboy problem: A dynamic model, European Journal of Operational Research, 149, 448-458.

16. Nose, T., & Ishii, H. (1996). Perishable inventory control with two type of customers and different selling prices under the warehouse capacity constraint, International Journal Production Economics, 44, 167-176.

2005 年 04 月 13 日收稿

2006 年 01 月 04 日初審

2006 年 03 月 15 日複審

2006 年 06 月 20 日接受

附錄 A

總期望利潤函數二階導數小於零之公式推導（Leibniz，s rule）

$$T\pi(Q)=\int_0^Q\left\{X_1\cdot MP_1+\int_0^{Q-X_1}\left[X_2\cdot MP_2+\int_0^{Q-X_1-X_2}[X_3\cdot MP_3+(Q-X_1-X_2-X_3)MP_{out}]f(X_3)dX_3\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_{Q-X_1-X_2}^{\infty}(Q-X_1-X_2)MP_3f(X_3)dX_3\right]f(X_2)dX_2+\int_{Q-X_1}^{\infty}(Q-X_1)MP_2f(X_2)dX_2\right\}f(X_1)dX_1$$
$$+\int_Q^{\infty}Q\cdot MP_1f(X_1)dX_1$$

令 $A(Q)=\int_0^{Q-X_1-X_2}[X_3MP_3+(Q-X_1-X_2-X_3)MP_{out}]f(X_3)dX_3$

$$B(Q)=\int_{Q-X_1-X_2}^{\infty}(Q-X_1-X_2)MP_3f(X_3)dX_3$$

$$C(Q)=\int_{Q-X_1}^{\infty}(Q-X_1)MP_2f(X_2)dX_2$$

$$D(Q)=\int_Q^{\infty}QMP_1f(X_1)dX_1$$

$$G(Q)=\int_0^{Q-X_1}X_2MP_2+[A(Q)+B(Q)]f(X_2)dX_2$$

$$H(Q)=\int_0^Q\{X_1MP_1+G(Q)+C(Q)\}f(X_1)dX_1$$

則 $T\pi(Q)$ **可以改寫成如下所示：**

$$T\pi(Q)=H(Q)+D(Q)$$

一階導數：

$$\frac{dA(Q)}{dQ}=\int_0^{Q-X_1-X_2}MP_{out}f(X_3)dX_3+(Q-X_1-X_2)MP_3\cdot f(Q-X_1-X_2) \quad \text{(A-1)}$$

$$\frac{dB(Q)}{dQ}=\int_{Q-X_1-X_2}^{\infty}MP_3f(X_3)dX_3-(Q-X_1-X_2)MP_3f(Q-X_1-X_2) \quad \text{(A-2)}$$

(A-1)+(A-2)得公式(A-3)

$$\int_0^{Q-X_1-X_2} MP_{out} f(X_3)dX_3 + MP_3\left[1-F_3(Q-X_1-X_2)\right] \quad \text{(A-3)}$$

將公式(A-3)代入 $G(Q)$ 則：

$$\frac{dG(Q)}{dQ}=\int_0^{Q-X_1}\left[\int_0^{Q-X_1-X_2} MP_{out} f(X_3)dX_3 + MP_3\left[1-F_3(Q-X_1-X_2)\right]\right]f(X_2)dX_2 + (Q-X_1)MP_2 f(Q-X_1) \quad \text{(A-4)}$$

$$\frac{dC(Q)}{dQ}=\int_{Q-X_1}^{\infty} MP_2 f_2(X_2)dX_2 - (Q-X_1)MP_2 f(Q-X_1) = MP_2\left[1-F(Q-X_1)\right]-(Q-X_1)MP_2 f(Q-X_1) \quad \text{(A-5)}$$

由公式(A-4)加公式(A-5)代入 $H(Q)$ 則：

$$\frac{dH(Q)}{dQ}=\int_0^{Q}\left\{\int_{0_1}^{Q-X_1}\left[\int_0^{Q-X_1-X_2} MP_{out} f(X_3)dX_3 + MP_3\left[1-F_3(Q-X_1-X_2\right]\right]f(X_2)dX_2 + MP_2\left[1-F_2(Q-X_1)\right]f(X_1)dX_1\right\}+QMP_1 f(Q) \quad \text{(A-6)}$$

經由以上之代換與推導 $T\pi(Q)$ 之一階導數如下所示：

$$\frac{dT\pi(Q)}{dQ}=\int_0^{Q}\left\{\int_{0_1}^{Q-X_1}\left[\int_0^{Q-X_1-X_2} MP_{out} f(X_3)dX_3 + MP_3\left[1-F_3(Q-X_1-X_2\right]\right]f(X_2)dX_2 + MP_2\left[1-F_2(Q-X_1)\right]f(X_1)dX_1\right\}+QMP_1 f(Q)+MP_1\left[1-F(Q)\right]-QMP_1 f(Q)$$

$$=\int_0^{Q}\left\{\int_{0_1}^{Q-X_1}\left[\int_0^{Q-X_1-X_2} MP_{out} f(X_3)dX_3 + MP_3\left[1-F_3(Q-X_1-X_2\right]\right]f(X_2)dX_2 + MP_2\left[1-F_2(Q-X_1)\right]f(X_1)dX_1\right\}+MP_1\left[1-F(Q)\right] \quad \text{(A-7)}$$

二階導數：由公式(A-7)

令 $I(Q)=\int_0^{Q-X_1-X_2} MP_{out} f(X_3)dX_3$ (A-8)

則 $\frac{dI(Q)}{dQ}=MP_{out} f(Q-X_1-X_2)$

$$J(Q)=MP_3\left[1-F_3(Q-X_1-X_2)\right] \tag{A-9}$$

則 $\dfrac{dJ(Q)}{dQ}=-MP_3 f(Q-X_1-X_2)$

$$K(Q)=\int_0^{Q-X_1}\left[I(Q)+J(Q)\right]f(X_2)dX_2 \tag{A-10}$$

則，$$\frac{dK(Q)}{dQ}=\left[MP_{out}f(Q-X_1-X_2)-MP_3 f(Q-X_1-X_2)\right]f(Q-X_1)$$
$$=\left[(MP_{out}-MP_3)f(Q-X_1-X_2)\right]f(Q-X_1)$$

$$L(Q)=MP_2\int_{Q-X_1}^{\infty}f(X_2)dX_2 \tag{A-11}$$

則，$\dfrac{dL(Q)}{dQ}=-MP_2 f(Q-X_1)$

$$M(Q)=MP_1\int_Q^{\infty}f(X_1)dX_1 \tag{A-12}$$

則，$\dfrac{dM(Q)}{dQ}=-MP_1 f(Q)$

將 $\dfrac{dT\pi(Q)}{dQ}$ 經由公式(A-8)、(A-9)、(A-10)、(A-11)和公式(A-12)之轉換，公式(A-7)可以簡化成如下所示：

$$\frac{dT\pi(Q)}{dQ}=\int_0^q\{[K(Q)]+L(Q)\}f(X_1)dX_1+M(Q)$$

因此，$T\pi(Q)$ 之二階導數如下所示：

$$\frac{d^2T\pi(Q)}{dQ^2}=\{(MP_{out}-MP_3)f(Q-X_1-X_2)f(Q-X_1)-MP_2 f(Q-X_1)\}f(Q)-MP_1 f(Q) \tag{A-13}$$

令公式(A-13)小於零，則

$$\frac{d^2 T\pi(Q)}{dQ^2} = \{(MP_{out} - MP_3)f(Q - X_1 - X_2)f(Q - X_1) - MP_2 f(Q - X_1)\}f(Q)$$
$$- MP_1 f(Q) < 0$$

$$\Rightarrow (MP_{out} - MP_3)f(Q - X_1 - X_2)f(Q - X_1)f(Q) < MP_1 f(Q) + MP_2 f(Q - X_1)f(Q)$$
$$\Rightarrow (MP_{out} - MP_3)f(Q - X_1 - X_2) < \frac{MP_1 + MP_2 f(Q - X_1)}{f(Q - X_1)} \quad \text{(A-14)}$$